1 CINEMÁTICA Y DINÁMICA

IDEAS PRINCIPALES

- Sistema de referencia
- Ecuaciones del movimiento
- Rapidez y velocidad instántaneas
- Aceleración. Componentes
- Vector de posición
- Fuerzas interiores y exteriores
- Leyes de la dinámica
- Principio de conservación del momento lineal

¿Qué recordáis de lo estudiado el curso pasado en esta materia?

Intentaremos responder a esta pregunta a lo largo de esta unidad. Y por si acaso lo sabéis todo, introduciremos algunos conceptos matemáticos nuevos, para que no penséis que no avanzamos en las tareas de aprendizaje.

1 CINEMÁTICA

El **movimiento** es el cambio de posición de un móvil respecto a un **sistema de referencia** (S.R.). No tiene sentido hablar de un movimiento absoluto, siendo imprescindible hacer explícito el S.R. utilizado.

1.1 Ecuación del movimiento conocida la trayectoria

Conocida la trayectoria que sigue el móvil se suele utilizar para describir el movimiento una ecuación que sólo incluye magnitudes escalares: es la ecuación que permite obtener la posición del móvil en cada momento: $e = f(t)$. Por **posición** se entiende la distancia, medida sobre la trayectoria, desde un punto que tomamos arbitrariamente como punto de referencia al punto donde se encuentra el móvil. También arbitrariamente se escoge un sentido como positivo y el contrario como negativo.

1.2 Rapidez instantánea y aceleración tangencial

La **rapidez** de un móvil nos indica la distancia que recorre, sobre la trayectoria, en la unidad de tiempo. Si la rapidez es constante llamamos al movimiento **uniforme**. Si no lo es, utilizamos la rapidez instantánea, v, definida por la expresión:

$$v = \frac{de}{dt}$$

La rapidez instantánea nos indica cuál será el cambio de posición en la unidad de tiempo si a partir de ese instante la velocidad se mantuviese constante.

Cuando lo que se quiere calcular es la rapidez media en un determinado intervalo de tiempo Δt, lo que se hace es dividir la distancia recorrida entre el valor de ese intervalo de tiempo.

¿Cómo se puede calcular la rapidez instantánea si un instante, por definición, no tiene duración alguna? Dicho de otro modo, ¿qué cambio de posición ha podido ocurrir en un intervalo de tiempo igual a 0? De acuerdo con ese razonamiento, el concepto de velocidad instantánea no tendría sentido.

La pregunta podemos hacerla de este otro modo: ¿La expresión de/dt representa un cociente? Aunque pudiéramos pensar que es así, la expresión anterior no representa un cociente. Siendo rigurosos, representa el valor límite al que tienden los cocientes $\Delta e/\Delta t$ cuando los intervalos temporales Δt tienden a cero.

$$\frac{de}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

Vamos a explicar lo que queremos decir con lo anterior. Para ello, supongamos que queremos calcular la rapidez de un móvil cuando $t = 3$ s si su posición en función del tiempo es: $e = 2 + 3\,t + t^2$. Para ello, calcularemos el valor de los cocientes $\Delta e/\Delta t$ para intervalos de tiempo cada vez más pequeños.

En la tabla siguiente se recogen los resultados que se obtienen si sustituimos valores de t próximos a 3 s, en intervalos cada vez más pequeños.

$\Delta t = t - 3$	$\Delta e = e_t - e_3$	$\Delta e/\Delta t$	$\Delta t = 3 - t$	$\Delta e = e_3 - e_t$	$\Delta e/\Delta t$
3,1 – 3 = 0,1	0,91	9,1	3 – 2,9 = 0,1	0,89	8,9
3,01 – 3 = 0,01	0,0901	9,01	3 – 2,99 = 0,01	0,0899	8,99
3,001 – 3 = 0,001	0,009001	9,001	3 – 2,999 = 0,001	0,008999	8,999
3,0001–3 = 0,0001	0,00090001	9,0001	3 – 2,9999 = 0,0001	0,00089999	8,9999
tiende a 0	tiende a 0	tiende a 9	tiende a 0	tiende a 0	tiende a 9

Haz los cálculos necesarios para comprobar que son correctos los datos que aparecen en la cuarta fila de la tabla.

Los datos de la tabla ponen de manifiesto que cuando los intervalos de tiempo son más pequeños también lo son los cambios de posición. No ocurre así con el cociente, cuyos valores son finitos y tienden a un valor, que es el mismo cuando los intervalos se toman por encima de $t = 3$ s que cuando se toman por debajo de $t = 3$ s.

Haciendo todas las operaciones anteriores para cualquier otro valor de t, se puede calcular la velocidad instantánea en diferentes instantes. Afortunadamente, hay una operación matemática, la derivada, que permite obtener esos límites a los cocientes de forma mucho más simple.

A.1.- Calcula la derivada respecto al tiempo de la función $e = 2 + 3t + t^2$. ¿Cuál es el valor de esa derivada para $t = 3$ s? Compáralo con el obtenido haciendo el límite del cociente en la tabla anterior.

El movimiento uniformemente acelerado

La variación de la rapidez en la unidad de tiempo la conocemos mediante el módulo de la **aceleración tangencial**. Si es constante, es decir, no varía con el tiempo, el movimiento se denomina **uniformemente acelerado**.

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

A.2.- La ecuación del movimiento de un móvil es $e = 25 + 40t - 5t^2$ m.

a) Describe el movimiento del móvil, (posición inicial, rapidez inicial, trayectoria...).

b) Calcula la ecuación de la rapidez en función del tiempo. ¿Cuánto vale la rapidez en $t = 3$ s? ¿Cuánto vale la aceleración tangencial?

c) Calcula la distancia recorrida por el móvil desde el instante inicial hasta $t = 6$ s.

d) ¿Qué significa que la aceleración tangencial sea negativa?

$v = 40 - 10t$ m/s; $v_3 = 10$ m/s; $a_t = -10$ m/s^2; $d = 100$ m

A.3.- Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con la rapidez de 200 m/s.

a) ¿Qué altura máxima alcanzará? ¿Cuánto tardará en llegar a esa altura?

b) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a la mitad de la altura máxima? ¿Qué rapidez tendrá en ese momento?

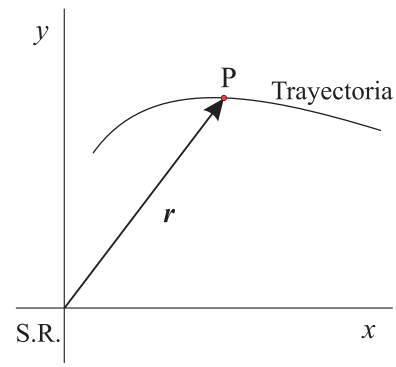
c) Calcula la posición y rapidez a los 15 y a los 30 s de iniciado el movimiento. Interpreta el significado de los valores obtenidos.

Toma para g el valor 10 m/s^2 y sentido positivo hacia arriba.

a) $h = 2000$ m; $t = 20$ s; b) $t = 5{,}86$ s; $v = 142$ m/s;
c) $h_{15} = 1875$ m; $h_{30} = 1500$ m; $v_{15} = 50$ m/s; $v_{30} = -100$ m/s

1.3 Vector de posición

Otra forma de representar la posición de un móvil es mediante el **vector de posición**, que es aquel que tiene su origen en el sistema de referencia escogido y su extremo en el punto donde se encuentre el móvil.

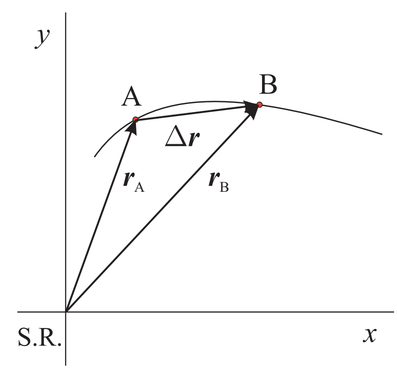


El vector de posición se puede expresar mediante las coordenadas del punto donde se halla el móvil y los correspondientes vectores unitarios:

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$$

Si el móvil se encuentra en un instante en el punto A y al pasar un intervalo de tiempo, Δt, se encuentra en el punto B, definimos el vector **desplazamiento**, $\Delta\boldsymbol{r}$, como la diferencia entre los vectores de posición en ambos puntos:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$$



Si conocemos el vector de posición en cada instante, es decir, si conocemos una ecuación que permita calcular las coordenadas del vector de posición en función del tiempo, $\boldsymbol{r}(t) = f(t)$, podemos conocer todas las características del movimiento.

A.4.- El vector de posición de un móvil viene dado por la expresión:

$$\boldsymbol{r} = 2\,t\,\boldsymbol{i} + 4\,t^2\,\boldsymbol{j}\ \text{m.}$$

a) Calcula y dibuja los vectores de posición para $t = 2$ y para $t = 4$ s.
b) Calcula y dibuja el vector desplazamiento entre $t = 2$ s y $t = 4$ s.

1.4 Velocidad instantánea

Definimos la velocidad como:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

La velocidad es un vector cuyo módulo es igual al valor absoluto de la rapidez, su dirección en cada punto es la tangente a la trayectoria en ese punto y su sentido es el del movimiento.

A.5.- Calcula el vector velocidad para el móvil de la A.4. ¿Es un movimiento uniforme? ¿Es un movimiento rectilíneo?

$\boldsymbol{v} = 2\,\boldsymbol{i} + 8\,t\,\boldsymbol{j}$ m/s

A.6.- El vector de posición de un móvil es: $\boldsymbol{r} = 2/3\ (10 - t)^{3/2}\ \boldsymbol{i} + 2/3\ t^{3/2}\ \boldsymbol{j}$ m. Calcula la expresión de la velocidad. ¿Es un movimiento uniforme? ¿Es curvilíneo?

$\boldsymbol{v} = -(10 - t)^{1/2}\ \boldsymbol{i} + t^{1/2}\ \boldsymbol{j}$ m/s

1.5 Aceleración. Componentes intrínsecas

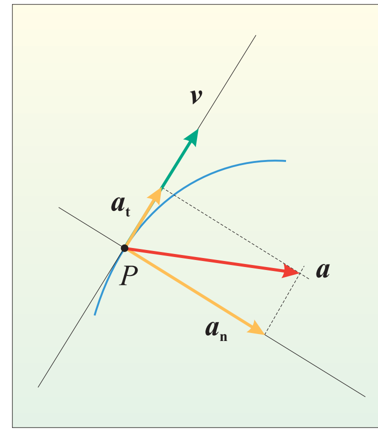
La velocidad es una magnitud vectorial. Además del módulo, tiene una dirección, tangente a la trayectoria, y sentido que es el del avance del movimiento.

Definimos el vector aceleración como:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

Siempre que haya variación del vector velocidad, habrá aceleración. Puesto que puede variar en módulo o dirección, distinguiremos dos tipos de componentes de la aceleración: tangencial y normal.

La **aceleración tangencial** está relacionada con la rapidez con la que varía el módulo de la velocidad. Es un vector que tiene la dirección de la tangente a la trayectoria en ese punto y cuyo módulo puede obtenerse como la derivada de la rapidez frente al tiempo.



$$\boldsymbol{a}_t = \frac{dv}{dt}\,\tau$$

La **aceleración normal o centrípeta** está relacionada con la rapidez con la que varía la dirección de la velocidad. Está dirigida hacia el centro de la trayectoria y su valor es:

$$\boldsymbol{a}_c = \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n}$$

A.7.- Un cuerpo que realiza un movimiento circular tiene una aceleración tangencial de 8 m/s^2 y una aceleración normal de 6 m/s^2. Dibuja la trayectoria y representa la aceleración tangencial y la normal en tres posiciones diferentes. ¿Cuál será el módulo de la aceleración total?

$a = 10\ m/s^2$

EJEMPLO

El vector de posición de un móvil viene dado por la expresión $\boldsymbol{r} = (t^3 + 2)\,\boldsymbol{i} + t^3\,\boldsymbol{j}$ m.

a) Escribe la expresión que representa el vector velocidad en función del tiempo.

b) Escribe la expresión que representa el vector aceleración en función del tiempo.

c) Calcula el módulo de la aceleración tangencial en el instante $t = 2$ s.

d) Calcula el módulo de la aceleración centrípeta en el mismo instante.

a) El vector velocidad lo obtenemos derivando respecto al tiempo la expresión del vector de posición:

$$\boldsymbol{v} = 3\,t^2\,\boldsymbol{i} + 3\,t^2\,\boldsymbol{j}\ \text{m/s}$$

b) Derivando el vector velocidad respecto al tiempo obtenemos el vector aceleración total:

$$\boldsymbol{a} = 6\,t\,\boldsymbol{i} + 6\,t\,\boldsymbol{j}\ \text{m/s}^2$$

c) Para calcular el módulo de la aceleración tangencial es necesario derivar respecto al tiempo el módulo del vector velocidad.

$$v = \sqrt{9t^4 + 9t^4} = \sqrt{18}\ t^2$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2\sqrt{18}\ t = 8{,}5\ t\ \text{m/s}^2$$

El módulo de la aceleración tangencial en el instante $t = 2$ s es $a_t = 17\ m/s^2$.

d) Para el cálculo del módulo de la aceleración centrípeta no podemos utilizar la expresión v^2/r, pues no conocemos el radio de curvatura. Pero debe cumplirse que: $a^2 = a_t^2 + a_c^2$, por lo que $a_c^2 = a^2 - a_t^2$

El módulo de la aceleración total es: $a = \sqrt{36t^2 + 36t^2} = \sqrt{72}\ t = 8{,}5t$

$$a_c^2 = (8{,}5\ t)^2 - (8{,}5\ t)^2 = 0; \quad a_c = 0$$

Puesto que la aceleración total y la aceleración tangencial tienen el mismo valor, la aceleración centrípeta es cero.

Se trata pues de un movimiento rectilíneo acelerado.

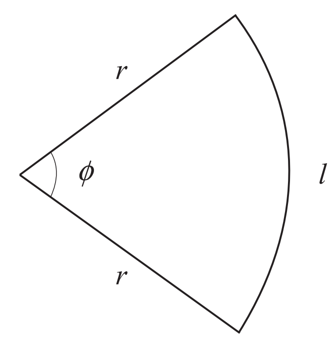
1.6 Movimientos circulares

Un cuerpo describe un movimiento circular cuando su trayectoria consiste en una circunferencia. Ejemplos cotidianos son el movimientos de discos, tiovivos, ruedas de un coche o motocicleta, etc. Antes de pasar al estudio del movimiento circular, vamos a recordar una unidad para medir ángulos que ya habrás visto en matemáticas.

El radián, una unidad para medir ángulos

El ángulo limitado por dos rectas que se cortan en un punto, puede ser expresado en grados, pero normalmente utilizaremos otra unidad llamada radián.

El radián (rad) es el ángulo central al que le corresponde un arco cuya longitud es igual al radio.



Así, en la figura, si el arco l tiene una longitud igual a la del radio r, el ángulo ϕ mide exactamente 1 radián. Dado que el arco que corresponde a 1 rad es igual a r, el que corresponde a 2 rad será 2 r, y el que corresponde a n radianes será n r. Por lo tanto podremos escribir que:

$$\textit{arco} = \textit{ángulo} \text{ (en rad)} \cdot \textit{radio}$$

$$l = \phi \ r$$

donde ϕ es el valor del ángulo expresado en radianes.

A.8.- a) ¿Cuál es la equivalencia en grados de un radián? Ten en cuenta que el ángulo central que corresponde a una circunferencia es 360 º, y que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$.

b) Completa la tabla:

radianes	0		π/4			π		
grados		30		60	90		270	360

Descripción del movimiento circular

Para describir un movimiento circular podemos usar además de las magnitudes lineales que ya conocemos (posición, rapidez, velocidad), otras que simplifican su estudio: las magnitudes angulares.

Igual que v mide la rapidez de cambio de la posición, podemos definir la rapidez angular, ω, que medirá la rapidez de cambio de la posición angular:

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Esta rapidez sería la de un valor medio o la que corresponde a un movimiento uniforme en el que la rapidez se mantiene constante.

Ya que $v = \Delta e/\Delta t$ y que $\Delta e = \Delta\phi\, r$, se puede escribir que $v = \Delta\phi\, r/\Delta t$, y teniendo en cuenta la definición de la rapidez angular $\omega = \Delta\phi\,/\Delta t$, se llega a una relación entre la magnitud lineal y la angular:

$$v = \omega r$$

A.9.- ¿Cuál será la unidad de la rapidez angular ω en el SI? Pasa a esta unidad 33 rpm y 2 vueltas/segundo.

$\omega = 3{,}46\ s^{-1}$; $\omega = 12{,}57\ s^{-1}$

A.10.- Un disco de 10 cm de radio gira a 45 r.p.m. en un tocadiscos. ¿Qué ángulo ha barrido y qué distancia ha recorrido un punto de su periferia durante 5 s? ¿Y un punto que está a 4 cm del eje? ¿Cómo serían las rapideces angulares de ambos puntos?

$\phi = 23{,}6$ rad; $\Delta e = 2{,}36$ m; $\Delta e = 0{,}94$ m

A.11.- La Tierra realiza dos giros, uno alrededor del Sol y otro sobre su propio eje.

a) ¿Cuánto valdrá la rapidez angular del planeta Tierra en cada movimiento?

b) ¿Cuánto vale la rapidez lineal de la Tierra en su giro alrededor del Sol ? (La distancia Tierra-Sol es de 150 millones de kilómetros).

c) Considerando sólo el movimiento de rotación, ¿cuánto valdrá la rapidez lineal de un punto del Ecuador? ¿Y del polo Norte? (El radio de la Tierra en el Ecuador es de 6378 km)

a) $\omega_t = 1{,}99 \cdot 10^{-7}\ s^{-1}$; $\omega_r = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$; b) $v = 30000$ m/s; c) $v_E = 464$ m/s; $v_P = 0$

Cuando el móvil que describe un movimiento circular no lo hace de forma uniforme, es decir, recorre distancias diferentes en tiempos iguales, la rapidez media no nos informa bien de cuál es la rapidez de ese movimiento. Es necesario conocer la rapidez instantánea, que la calculamos como el límite del cociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla, cuando éste es infinitamente pequeño. De igual manera, la rapidez angular instantánea es el límite del cociente entre el ángulo barrido y el tiempo empleado en barrerlo, cuando éste es infinitamente pequeño. Entre los valores instantáneos existe la misma relación que entre los valores medios:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}; \qquad v = \omega\, r$$

2 DINÁMICA

En la cinemática se describe el movimiento olvidando las características del móvil y los factores que pueden hacer cambiar ese movimiento. La dinámica se ocupa de tener en cuenta la relación que existe entre las características del movimiento en sí mismo, con las características del móvil concreto que realiza ese movimiento y con las fuerzas que actúan para cambiar el movimiento.

2.1 Fuerzas

La fuerza es una magnitud vectorial que mide la intensidad de una interacción entre dos cuerpos. **Un cuerpo sólo no tiene fuerza**, las fuerzas sólo existen cuando hay dos cuerpos que interaccionan. La unidad es el newton (N) y el origen de todas las fuerzas se deben a las interacciones de tipo gravitatorio, de tipo electromagnético o de tipo nuclear.

Los vectores que representen las fuerzas tendrán su origen en el cuerpo sobre el que actúan. Siempre que dibujes una fuerza debes explicitar los cuerpos que interaccionan.

Fuerzas interiores y exteriores

Cuando consideramos un sistema formado por más de un cuerpo debemos distinguir entre las fuerzas que se hacen entre sí las diferentes partes del sistema y las fuerzas que hacen otros cuerpos sobre el sistema. A las primeras se les llama fuerzas internas o interiores, mientras que a las otras se les llama fuerzas externas.

A.12.- Indica si la siguiente afirmación es correcta: «La suma de todas las fuerzas interiores que actúan en un sistema es nula, tanto si el sistema está en equilibrio como si no lo está.»

Las fuerzas interiores no afectan al movimiento del sistema en su conjunto, aunque sí pueden afectar al movimiento de las diferentes partes del sistema.

La suma de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema es la responsable de la aceleración.

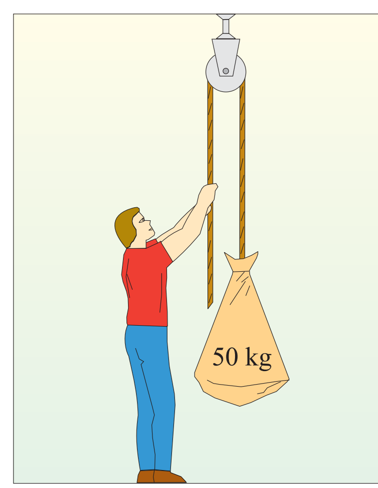
Por ejemplo, si consideramos como sistema un coche, las fuerzas que se hacen entre sí las distintas partes del coche no consiguen cambiar el movimiento de ese coche. El movimiento del coche cambia debido a las fuerzas que ejercen otros cuerpos sobre él: la fuerza que hace la Tierra, la que hace el aire, la que hace la carretera, etc.

Otro ejemplo: si consideramos un sistema formado por dos carritos que se pueden atraer debido a que están unidos cada uno a un imán, las fuerzas entre ellos no puede modificar el movimiento del sistema en su conjunto. Ahora bien, si consideramos que un sistema está formado por sólo un carrito, la fuerza que hace el otro sobre él ya es una fuerza externa y sí puede modificar el movimiento del carrito.

A.13.- Considera un sistema formado por un hombre (m = 75 kg), que levanta un saco (m = 50 kg), haciendo uso de una polea fija (m = 10 kg).

a) Dibuja e indica el valor de cada una de las fuerzas que actúan sobre el saco, el hombre y la polea.

b) Indica cuáles de las fuerzas anteriores son internas y cuáles son externas al sistema considerado.



A.14.- Dos bolas ruedan una hacia la otra sobre una mesa de billar. Dibuja las fuerzas sobre cada bola en los siguientes casos:

a) Antes de chocar; en el momento del choque; después del choque, cuando se están separando.

b) Si el sistema que consideramos es el formado por las dos bolas, indica qué fuerzas serán interiores y qué fuerzas serán exteriores.

c) Si consideramos un sistema formado por una de las bolas, indica qué fuerzas serán interiores y qué fuerzas serán exteriores.

Fuerzas de rozamiento

Cuando dos cuerpos se ponen en contacto aparecen fuerzas que se oponen al desplazamiento relativo entre ambos. Estas fuerzas, que se llaman de rozamiento, dependen de la fuerza que comprime ambos cuerpos, de la naturaleza de las superficies en contacto y de su grado de pulimento.

El valor máximo de la fuerza de rozamiento depende de la fuerza normal que comprime ambas superficies.

$$F_r \leq \mu N$$

El coeficiente de rozamiento μ es un valor constante que se determina experimentalmente y que recoge la influencia de la naturaleza de las superficies y su grado de pulimento.

El valor máximo se alcanza cuando ya hay movimiento relativo entre ambas superficies, o cuando la suma de las fuerzas que tiende a poner en movimiento un cuerpo sobre el otro es mayor que la fuerza de rozamiento máxima.

A.15.- Un cuerpo de 10 kg está en reposo sobre una superficie horizontal siendo el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie de 0,2. Calcula la fuerza de rozamiento cuando (g = 10 N/kg):

a) Tiramos del cuerpo con una fuerza horizontal de 10 N.

b) Tiramos del cuerpo con una fuerza horizontal de 30 N.

c) El cuerpo se está moviendo y tiramos de él con una fuerza horizontal de 5 N.

d) Tiramos del cuerpo con una fuerza de 40 N inclinada 30 º sobre la horizontal.

a) F_r = 10 N; b) F_r = 20 N; c) F_r = 20 N; d) F_r = 16 N

2.2 Tercera ley de Newton

Cuando dos cuerpos interaccionan, la fuerza que el primero ejerce sobre el segundo es igual y de sentido contrario a la que el segundo ejerce sobre el primero.

Cada una de las fuerzas está aplicada sobre un cuerpo distinto por lo que no pueden sumarse. Aunque ambas fuerzas tienen el mismo valor, el efecto que producen puede ser muy diferente.

A.16.- Dibuja tres parejas de fuerzas en el apartado a) de la A.15 en el sentido que indica la tercera ley de Newton. En ese mismo ejercicio, indica también fuerzas que siendo iguales en valor y de sentidos contrarios no sean pareja en el sentido que lo dice la tercera ley.

2.3 Momento lineal

El **momento lineal**, llamado también **cantidad de movimiento**, de un cuerpo se define como el vector igual al producto de la masa del cuerpo por el vector velocidad de ese cuerpo (la velocidad de su centro de masas).

$$\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$$

A.17.- Lanzamos un proyectil de 4 kg de masa con velocidad inicial de 400 m/s inclinada 30 º sobre la horizontal. Calcula la cantidad de movimiento del proyectil cuando sale de la boca del arma.

$\boldsymbol{p} = 1386\,\boldsymbol{i} + 800\,\boldsymbol{j}$ kgm/s

2.4 Principio fundamental de la dinámica: segunda ley de Newton

La variación con respecto al tiempo del momento lineal de un cuerpo es igual a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre ese cuerpo.

$$\Sigma \boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\boldsymbol{a}$$

Para que el segundo principio pueda expresarse como $\Sigma \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$, es necesario que la masa sea constante. Si la masa varía, esa forma de expresar el segundo principio no es válida. La expresión en función de la variación del momento lineal es válida siempre.

A.18.- Un cuerpo de 2 kg lleva una rapidez de 40 $\boldsymbol{i}$ m/s. En la misma dirección, pero sentido contrario, se ejerce una fuerza sobre él de 16 N durante 5 segundos. Calcula:

a) La variación de la cantidad de movimiento del cuerpo.

b) La velocidad final del mismo.

$\Delta \mathbf{p} = -80\ \boldsymbol{i}$ kgm/s; $v = 0$

A.19.- Una persona de 80 kg está encima de una balanza de resorte en un ascensor. Calcula cuánto marcará la balanza en los siguientes casos: (g = 10 N/kg)

a) El ascensor está parado.

b) Comienza a subir con una aceleración de 1 m/s^2.

c) Sube con una rapidez constante de 1 m/s.

d) Baja frenando con una aceleración de 1 m/s^2.

a) 800 N; b) 880 N; c) 800 N; d) 880 N

A.20.- Un cuerpo de masa 3 kg lleva una velocidad $\boldsymbol{v} = 3\ \boldsymbol{i} - 2\ \boldsymbol{j}$ m/s. A partir de ese instante y durante 8 s actúa sobre él una fuerza $\boldsymbol{F} = 2\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ N.

Calcula el momento lineal al final de los 8 s y la velocidad en ese instante.

$\boldsymbol{p} = 25\ \boldsymbol{i} + 2\ \boldsymbol{j}$ kgm/s; $\boldsymbol{v} = 8{,}3\ \boldsymbol{i} + 0{,}67\ \boldsymbol{j}$ m/s

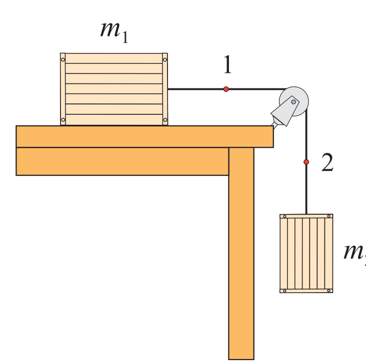
A.21.- En el sistema de la figura, m_1= 7 kg y m_2= 2 kg y el coeficiente de rozamiento 0,1. Calcula:

a) La aceleración.

b) La tensión en los puntos 1 y 2.

c) La distancia recorrida en 1 segundo.

a) a = 1,44 m/s^2; b) $|T_1| = |T_2|$ = 17,1 N; c) Δe = 0,72 m



2.5 Primera ley de Newton: principio de inercia

Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza o la suma de todas las que actúan es nula el cuerpo permanecerá en reposo si estaba en reposo o se moverá con movimiento rectilíneo uniforme si estaba en movimiento.

A.22.- a) En un plano inclinado 30 º hay un cuerpo de 10 kg. ¿Cuál será la aceleración de caída del cuerpo si suponemos rozamiento nulo? ¿Qué fuerza habrá que realizar para que baje con movimiento uniforme? (g = 10 N/kg)

b) Repite estos cálculos si consideramos que el coeficiente de rozamiento entre ambas superficies es 0,15.

a) $\boldsymbol{a} = 5\ \boldsymbol{i}$ m/s^2; $\boldsymbol{F} = -50\ \boldsymbol{i}$ N; b) $\boldsymbol{a} = 3{,}7\ \boldsymbol{i}$ m/s^2; $\boldsymbol{F} = -37\ \boldsymbol{i}$ N

2.6 Ley de conservación del momento lineal

La segunda ley de la dinámica establece que al actuar una fuerza exterior sobre un sistema produce en éste una variación de la cantidad de movimiento o momento lineal. La ley de conservación del momento lineal establece que:

> Cuando sobre un sistema no actúe ninguna fuerza, o la suma de todas las que actúen sea nula, no se producirá ninguna variación del momento lineal, es decir, el momento lineal permanecerá constante.

$$\text{Si } \Sigma \boldsymbol{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p} = \text{ constante}$$

A.23.- Considera un muelle (sin masa) que lo mantenemos comprimido. En su extremo izquierdo está en contacto con una bola de 1 kg mientras que en su extremo derecho está en contacto con una bola de 3 kg. Si dejamos que el muelle recupere su longitud habitual la bola de 1 kg sale con velocidad de 4 m/s hacia la izquierda. ¿Con qué velocidad saldrá la otra bola?

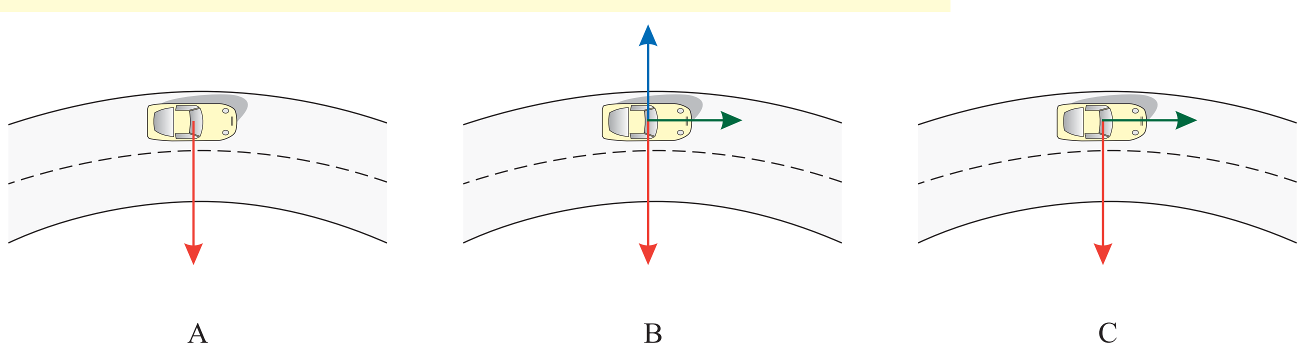
2.7 Fuerza en la dirección normal

Si un cuerpo describe un movimiento curvilíneo tendrá una aceleración normal o centrípeta dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria en cada punto. Según la segunda ley de Newton, esta aceleración está producida por una componente de la fuerza llamada centrípeta o normal, cuyo módulo es:

$$F_{\text{n}} = m\frac{v^2}{r}$$

La fuerza normal no se tiene que corresponder siempre con una interacción real. Si el movimiento es circular uniforme en el que la rapidez es constante, la fuerza normal será la suma de todas las fuerzas que actúan, y se corresponderá con una fuerza real si sólo actúa una única fuerza, por ejemplo la fuerza de atracción de la Tierra sobre la Luna. Si el movimiento no es uniforme la suma de las fuerzas podemos considerarla como la suma de una componente tangencial, que es la que producirá la aceleración tangencial, y otra normal que produce la aceleración normal.

A.24.- Un coche toma una curva sin peralte con rapidez constante. Escoge entre los siguientes esquemas el que representa las fuerzas que actúan sobre él. Explícalo.



A.25.- Una bola de 200 gramos gira con rapidez constante de 4 m/s describiendo una circunferencia de 50 cm de radio. Suponiendo que lo hace sobre una mesa horizontal y que podemos despreciar el rozamiento:

a) ¿Qué fuerza se debe hacer sobre la bola para que siga ese movimiento?

b) ¿que le sucederá al movimiento de la bola si en un instante dado la fuerza que se hace sobre la bola hacia el centro de la trayectoria es menor de la calculada en el apartado anterior?

a) $F = 6{,}4$ N

EJEMPLO

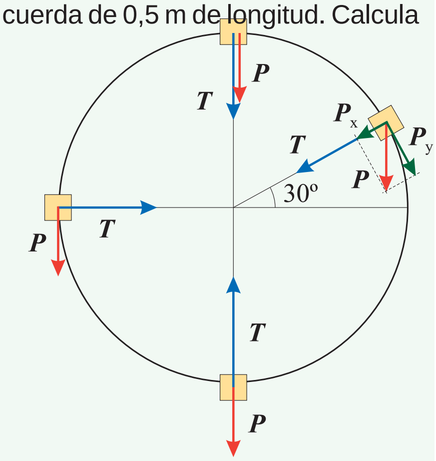
Un cuerpo de 0,5 kg recorre una circunferencia vertical atado al extremo de una cuerda de 0,5 m de longitud. Calcula la tensión de la cuerda cuando el cuerpo tenga una rapidez de 6 m/s en las siguientes posiciones:

a) En el punto más alto de la trayectoria.

b) En el punto más bajo.

c) A la altura del centro de la circunferencia.

d) Formando un ángulo de 30 º con la horizontal.



Las dos fuerzas que actúan sobre la piedra son la que hace la Tierra, el peso (***P***), y la que hace la cuerda, la tensión (***T***).

Para facilitar los cálculos, en cada punto tomaremos un sistema de referencia diferente. Uno de los ejes coordenados tendrá la dirección de la aceleración normal y tomaremos como sentido positivo el que tenga la aceleración normal en ese punto; el otro eje será perpendicular al anterior.

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica tenemos:

a) $T + P = mv^2/r$; $T = mv^2/r - P$; $T = 0{,}5 \cdot 36/0{,}5 - 5 = 31$ N.

b) $T + P = mv^2/r$; $T = mv^2/r - P$; $T = 0{,}5 \cdot 36/0{,}5 - (-5) = 41$ N.

c) En este caso la fuerza peso no tiene ninguna componente en la dirección de la aceleración. Por lo tanto,

$$T = mv^2/r = 36 \text{ N}.$$

d) En este caso es necesario descomponer el peso en dos componentes, en las direcciones de los ejes. La componente P_x es la que tiene la dirección de la aceleración centrípeta.

$$T + P_x = mv^2/r;\ T + mg \operatorname{sen} 30^{\circ} = mv^2/r;\ T = 33{,}5 \text{ N}.$$

Al analizar los resultados observamos que la tensión será mayor en el punto más bajo y menor en el punto más alto, es decir los valores de la tensión disminuyen a medida que el cuerpo sube.

ACTIVIDADES DE RECAPITULACIÓN

A.1.- La posición de un móvil sobre la trayectoria está dada por $e = -40 + 32\,t - t^2$ m.

a) Calcula el instante en el que el móvil tiene rapidez nula.

b) Calcula la distancia recorrida desde que $t = 0$ hasta que $t = 20$ s.

c) Calcula la aceleración tangencial y centrípeta cuando $t = 5$ s.

a) $t = 16$ s; b) $|\Delta e| = 272$ m; c) $a_t = -2$ m/s^2

A.2.- Un fusil dispara una bala con una rapidez inicial de 400 m/s con una inclinación de 30º respecto a la horizontal. Calcula:

a) La posición y rapidez de la bala 10 s después del lanzamiento.

b) El tiempo que tarda en llegar a su máxima altura.

c) La posición de la bala cuando vuelve a caer al suelo.

a) $x = 3464$ m; $y = 1510$ m; $v = 361$ m/s; b) $t = 20{,}4$ s; c) $x = 14139$ m

A.3.- El vector de posición de un móvil viene dado por $\boldsymbol{r} = 4 \cos 2t\,\mathbf{i} + 4 \text{ sen } 2t\,\boldsymbol{j}$ m. Calcula:

a) La expresión de su velocidad. $\boldsymbol{v} = -8 \text{ sen } 2t\,\boldsymbol{i} + 8 \cos 2t\,\boldsymbol{j}$ m/s

b) La expresión de la aceleración. $\boldsymbol{a} = -16 \cos 2t\,\boldsymbol{i} - 16 \text{ sen } 2t\,\boldsymbol{j}$ m/s^2

c) La aceleración tangencial y normal. $\boldsymbol{a}_t = 0$; $\boldsymbol{a}_n = -16 \cos 2t\,\boldsymbol{i} - 16 \text{ sen } 2t\,\boldsymbol{j}$ m/s^2

d) El radio de la trayectoria. $r = 4$ m

e) Describe el tipo de movimiento.

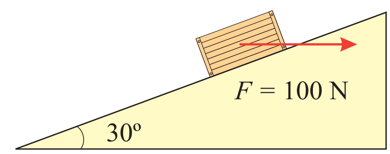
A.4.- El vector de posición de un móvil de 3 kg viene dado por $\boldsymbol{r} = t^2\,\boldsymbol{i} + t^2\,\boldsymbol{j}$ m. Calcula:

a) La aceleración total, tangencial y centrípeta. $\boldsymbol{a} = 2\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j}$ m/s^2; $\boldsymbol{a}_t = 2\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j}$ m/s^2; $\boldsymbol{a}_n = 0$

b) El momento lineal a los 2 segundos. $\boldsymbol{p} = 12\,\boldsymbol{i} + 12\,\boldsymbol{j}$ kg·m/s

c) ¿Actúa sobre la partícula alguna fuerza? En caso afirmativo, calcula su valor. $\boldsymbol{F} = 6\,\boldsymbol{i} + 6\,\boldsymbol{j}$ N

A.5.- La masa del cuerpo de la figura es de 2 kg, la inclinación del plano de 30 º y el coeficiente de rozamiento 0,2. Calcula:



a) La fuerza que aprieta ambas superficies.

b) La suma de todas las fuerzas.

c) El tiempo que tarda en subir 5 metros partiendo del reposo. ($g = 10$ N/kg)

a) $N = 67{,}3$ N; b) $\Sigma F = 63{,}1$ N paralela al plano hacia arriba; c) $t = 0{,}56$ s

A.6.- En los extremos de una cuerda que pasa por una polea sin rozamientos se colocan dos cuerpos de 8 y 12 kg respectivamente. (Toma $g = 10$ N/kg)

a) Dibuja en un diagrama las fuerzas que actúan.

b) Calcula la aceleración del sistema dejado en libertad.

c) ¿Qué tensión soporta la cuerda?

d) Calcula el tiempo que tardarán en separarse los cuerpos 6 m si inicialmente estaban al mismo nivel.

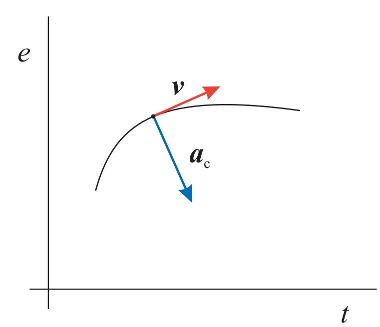
$a = 2$ m/s^2; $T = 96$ N; $t = 1{,}73$ s

A.7.- ¿Son verdaderas o falsas las siguientes frases? Indica el error en las que sean falsas:

a) La aceleración tangencial tiene la misma dirección y sentido que la velocidad.

b) La distancia recorrida es siempre la distancia, medida sobre la trayectoria, entre los puntos inicial y final.

c) El movimiento de un cuerpo siempre tiene lugar en la dirección de la suma de las fuerzas.



d) Si en un instante la velocidad de un cuerpo es nula también lo es la suma de las fuerzas.

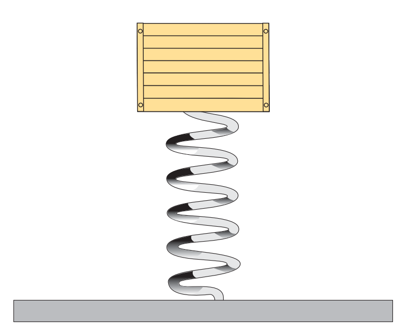
e) Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza, éste estará necesariamente en reposo.

f) El vector velocidad y la aceleración centrípeta se representan en la gráfica e-t tal como indica la figura.

g) Un movimiento es retardado cuando la aceleración es negativa.

h) La cantidad de movimiento tiene la misma dirección y sentido que la velocidad.

A.8.- La figura representa a un muelle que se está comprimiendo bajo la caja que hemos colocado encima, cuya masa es de 10 kg. La caja se mueve hacia abajo con una aceleración de 2 m/s^2.



Calcula la fuerza que ejerce la caja sobre el muelle y la fuerza que ejerce el muelle sobre la caja. ($g = 10$ N/kg)

$F = 80$ N

A.9.- En cursos anteriores siempre hemos dicho que todas las fuerzas tenían sólo dos orígenes, o bien gravitatorio o bien electromagnético. En este tema hemos hablado de muchas fuerzas diferentes: centrípeta, normal, tangencial, de rozamiento. ¿Existe contradicción entre lo dicho en los cursos anteriores y lo que hemos dicho en este curso?

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1.1 Productos de vectores

Existen dos operaciones con vectores denominadas productos: el producto escalar y el producto vectorial de dos vectores.

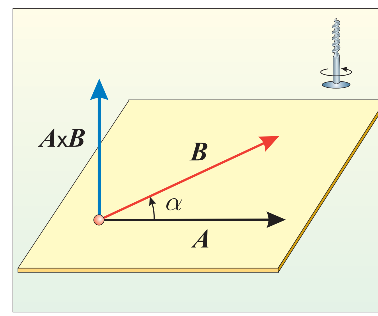
El producto escalar de dos vectores da como resultado un escalar y queda definido como

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A\,B \cos \alpha$$

donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son los vectores que se operan y el ángulo que forman sus direcciones. En función de sus componentes, el producto escalar se puede expresar como

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

El producto vectorial de dos vectores da como resultado otro vector cuyo módulo es el producto de los módulos de los vectores por el seno del ángulo que forman, su dirección es perpendicular al plano que determinan los vectores y su sentido es el del avance del tornillo cuando lo hacemos girar lo mismo que lo hace el primer vector para coincidir con el segundo por el camino más corto.



$$\left|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\right| = AB \text{ sen } \alpha$$

A.1.- Calcula el producto vectorial del vector A cuyo módulo es 7 por el vector B cuyo módulo es 9, sabiendo que forman un ángulo de 60 º. ¿Cuál es la dirección y sentido del vector producto vectorial?

¿Será igual el resultado si multiplicamos el vector B por el vector A? Explica la respuesta.

¿Cuál será el producto vectorial de dos vectores que tengan la misma dirección?

¿Qué ángulo deben formar dos vectores para que su producto vectorial sea máximo?

1.2 Momento de una fuerza

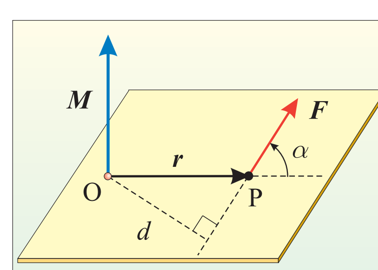
¿De qué depende la capacidad de una fuerza para provocar un giro?

Pensemos cómo empujamos cuando se quiere abrir o cerrar una puerta. El efecto de la fuerza depende tanto de su valor como de dónde y hacia dónde empujemos, es decir de la distancia del punto de aplicación de la fuerza a las bisagras y también de la inclinación de la fuerza.

Será interesante definir una magnitud que tenga en cuenta estos factores, magnitud que se utilizará cuando se quiera describir y explicar el movimiento de rotación. A esa magnitud se le llama momento de una fuerza respecto de un punto y nos informa del «poder giratorio» de esa fuerza.

Sea una fuerza aplicada en un punto P cuya situación viene dada por el vector de posición $\boldsymbol{r}$. Definimos el momento de la fuerza respecto del punto O como:

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

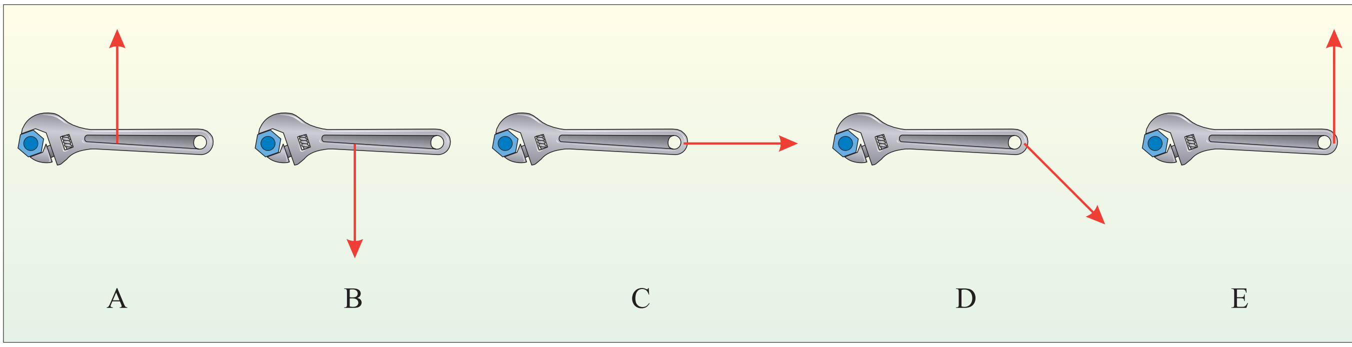


El momento es un pseudovector normal al plano determinado por $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{F}$ y de módulo:

$$M_o = F\,r \text{ sen } \alpha = F\,d$$

Para que el momento sea nulo no es imprescindible que $F = 0$. También es nulo el momento cuando los vectores $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{F}$ son paralelos que es lo que ocurre en el caso de las fuerzas centrales. Por ejemplo, la fuerza que el Sol ejerce sobre la Tierra en cualquier punto de la trayectoria de ésta, está siempre dirigida hacia el Sol, por lo que el momento de esa fuerza respecto al Sol es siempre nulo.

A.2.- Los dibujos siguientes representan una llave inglesa actuando sobre una tuerca. La flecha representa la fuerza que ejercemos sobre la llave inglesa, que en todos los casos tiene el mismo valor.



a) ¿En qué situación será mayor el efecto que se hará sobre la tuerca? Clasifícalos en orden creciente, de menor a mayor efecto.

b) ¿Intentamos hacer girar la tuerca siempre hacia el mismo lado? ¿Cómo podríamos indicar hacia dónde se intenta hacer girar la tuerca?

c) Si suponemos que la fuerza es de 20 N y que la longitud total de la llave inglesa es de 18 cm, calcula el momento de la fuerza respecto al centro de la tuerca en cada una de las situaciones.

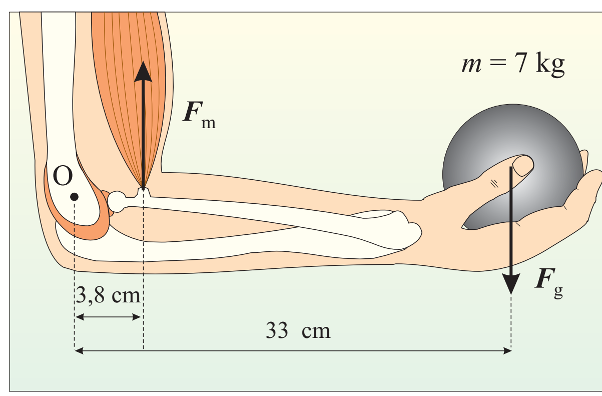
A.3.- El brazo y el antebrazo de la figura forman un ángulo de 90 º. Si suponemos que sostienen la bola de forma que ésta se encuentra en equilibrio, calcula: (g = 10 N/kg)

a) El momento del peso de la bola respecto a la articulación del codo.

b) El momento de la fuerza Fm respecto a la articulación del codo.

c) La fuerza F_m.

$\boldsymbol{M} = -23{,}1\ \boldsymbol{k}$ Nm; $\boldsymbol{M} = 23{,}1\ \boldsymbol{k}$ Nm; $\boldsymbol{F}_m = 608\ \boldsymbol{j}$ N



Las fuerzas $\boldsymbol{F}_g$ y $\boldsymbol{F}_m$ no están dibujadas con la misma escala

1.3 Momento angular de una partícula

El momento angular recibe también el nombre de momento cinético y se representa comúnmente por las letras $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{C}$ o $\boldsymbol{J}$.

Imagínate dos bolas iguales girando con la misma velocidad sólo que una atada a una cuerda de doble longitud que la otra. Las dos tienen el mismo momento lineal, pero sin embargo no podemos decir que ambos movimientos sean idénticos, ya que el radio de la órbita también influye en las características de ese movimiento. También podríamos comparar el movimiento de dos bolas iguales, describiendo órbitas del mismo radio, pero con velocidades diferentes; tampoco podríamos decir que sus movimientos son idénticos.

Para estos casos, viene bien definir una magnitud que tenga en cuenta tanto la masa como la velocidad y el radio de la trayectoria. Esa magnitud se llama momento angular, momento cinético o cantidad de movimiento angular, y para este caso concreto su valor sería $L = m\,v\,r$, siendo r el radio. Su unidad en el SI es el kg·m^2/s.

A.4.- Un cuerpo de masa 3 kg se mueve con rapidez constante de 4 m/s describiendo una circunferencia de 5 m de radio. Calcula:

a) El momento angular respecto al centro de la circunferencia.

b) Supongamos que disminuye el radio de la trayectoria hasta 2 metros. ¿Cuál debe ser la velocidad del cuerpo para que no cambie su momento angular?

L = 60 kgm^2/s; v = 10 m/s

A.5.- La Tierra tiene una masa aproximada de $6\cdot 10^{24}$ kg, siendo el radio de su órbita alrededor del Sol de $1{,}5\cdot 10^{8}$ km. Calcula su momento cinético respecto al Sol.

$L = 2{,}7\cdot 10^{40}$ kg·m^2/s

Definición general del momento angular

Supongamos una partícula de masa m en movimiento siguiendo una trayectoria cualquiera. Sea $\boldsymbol{v}$ su velocidad en un instante dado respecto a un punto O y $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$, su cantidad de movimiento. Se llama, por definición, vector momento angular o vector momento cinético $\boldsymbol{L}$ de la partícula respecto al punto O al producto vectorial:

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{O}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

perpendicular al plano formado por el punto O y la velocidad $\boldsymbol{v}$. Si la trayectoria es plana y O está contenido en el mismo plano, $\boldsymbol{L}$ resulta perpendicular a dicho plano. En el caso general, la dirección y el valor del momento angular varían al desplazarse la partícula.

A.6.- Demuestra que para el caso del movimiento circular, el módulo del momento cinético coincide con la expresión $L = m\,v\,r$.

1.4 Teorema de conservación del momento angular

Si sobre una partícula actúa una fuerza se produce una variación de su velocidad y por lo tanto en su momento cinético. ¿De qué depende la variación del momento angular respecto del tiempo?

Si derivamos respecto al tiempo la expresión $\boldsymbol{L}_{\mathrm{O}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ tenemos:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\right)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = 0 + \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}$$

expresión que se conoce como teorema del momento cinético y que nos indica que la rapidez con la que cambia el momento angular depende del momento respecto al punto que estamos tomando como referencia de la fuerza que actúa sobre la partícula.

Cuando $\Sigma\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{L} = \text{constante}$

es decir, que si la suma de los momentos respecto a un punto O que se ejercen sobre la partícula es nula, el momento angular de la partícula respecto de ese punto permanece invariable.

1.5 Fuerzas centrales

Tiene particular interés el estudio del momento cinético cuando las fuerzas son centrales, que son aquellas en las que la fuerza y el vector de posición tienen la misma dirección y por lo tanto, el momento de la fuerza respecto de cualquier punto contenido en la dirección de la fuerza es cero, $\boldsymbol{M} = 0$, y por ello el momento cinético es constante. Que el momento cinético sea constante equivale a afirmar:

1) Que la trayectoria ha de ser plana, pues en caso contrario $\boldsymbol{L}$ cambiaría de dirección y ya no sería constante.

2) Que las áreas barridas por el vector $\boldsymbol{r}$ en tiempos iguales son iguales (es decir, que la velocidad areolar es constante).

Existen muchos ejemplos de este tipo de fuerzas como, por ejemplo, la atracción del Sol sobre los planetas del sistema solar o la atracción de la Tierra sobre la Luna o cualquier satélite artificial.