2 TRABAJO Y ENERGÍA

IDEAS PRINCIPALES

- Energía
- Trabajo
- Producto escalar de dos vectores
- Integral definida
- Fuerzas conservativas
- Energía potencial
- Teorema de las fuerzas vivas
- Conservación de la energía mecánica

1 TRABAJO Y ENERGÍA

La definición del concepto energía utilizada en cursos anteriores fue:

La energía es una propiedad de todo sistema material en virtud de la cual éste puede transformarse modificando su situación o estado, así como actuar sobre otros originando en ellos procesos de transformación.

A.1.- a) Escribe las formas de energía que conozcas (no confundirlas con fuentes de energía).

b) ¿Qué significa que la energía se transforma? Pon algún ejemplo.

c) Enuncia el principio de conservación de la energía. Pon algún ejemplo.

d) Explica qué significa que la energía se degrada. Pon algún ejemplo.

e) Explica qué significa que la energía se transfiere. Pon algún ejemplo.

f) ¿Qué entiendes por calor y por trabajo? Describe un proceso en el que sea adecuado utilizar las palabra calor en sentido científico y otro en el que sea adecuado el uso de la palabra trabajo.

1.1 Concepto de trabajo

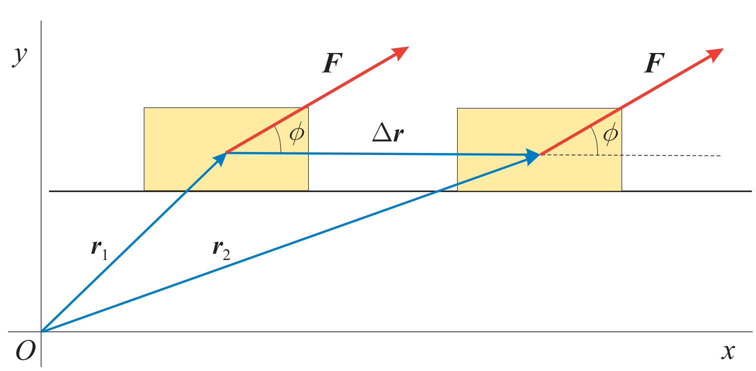
En cursos anteriores analizamos el significado científico de la palabra «trabajo». El trabajo es una magnitud que permite calcular las transferencias de energía entre dos sistemas y las transformaciones de un tipo de energía en otro dentro de un mismo sistema cuando conocemos las fuerzas que actúan y el desplazamiento que experimenta el punto de aplicación de esas fuerzas. Por lo tanto, **el trabajo NO es una forma de energía,** aunque como está relacionado con los cambios de energía su unidad en el SI sea también el julio (J).

Si tal como vemos en la figura, sobre un sistema se ejerce la fuerza $\boldsymbol{F}$ cuyo punto de aplicación se desplaza $\Delta\boldsymbol{r}$, el trabajo realizado* por esa fuerza se calcula:

$$W = F\,\Delta r \cos\phi$$

ϕ es el ángulo que forman las direcciones de la fuerza y del desplazamiento.

*Aunque se dice «trabajo realizado por una fuerza» quizá sería más correcto decir trabajo asociado o trabajo relacionado con una fuerza. El trabajo no es algo realizado o hecho por nada, sólo es una magnitud que utilizamos para describir cambios energéticos en los sistemas. Es cierto que puede calcularse si conocemos la fuerza y el desplazamiento, pero eso no quiere decir que pueda «ser creado» por las fuerzas.



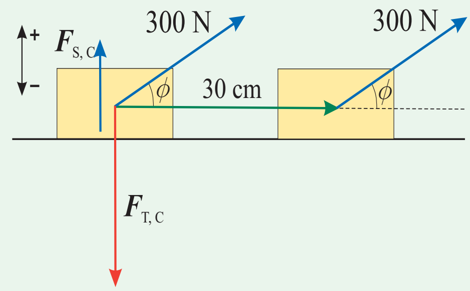
Cuando un sistema es rígido (una bola de acero es casi rígida) no hay diferencia entre el desplazamiento del sistema en su conjunto y el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza aplicada al sistema, pero si el sistema es deformable (un muelle, por ejemplo) no es lo mismo el desplazamiento del sistema que el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza aplicada sobre él.

EJEMPLO

Un cuerpo de 30 kg se desplaza 30 cm sobre una superficie horizontal cuando de él se tira con una fuerza de 300 N, cuya dirección forma un ángulo de 30º con la horizontal. Suponemos un rozamiento despreciable.

a) Identifica todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y calcula el trabajo realizado por cada una sobre el cuerpo.

b) ¿Cuál será la rapidez del cuerpo cuando deja de actuar la fuerza suponiendo que su rapidez inicial era de 4 m/s?



a) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, teniendo en cuenta el criterio de signos, son:

$\boldsymbol{F}_{T,C} = -294\,\boldsymbol{j}$ N (La de atracción de la Tierra).

$\boldsymbol{F}_{S,C} = 144\,\boldsymbol{j}$ N (La que ejerce el suelo sobre el cuerpo, su valor lo conocemos a partir de tener en cuenta que el cuerpo está en equilibrio en el eje Y).

Y la fuerza de 300 N que hemos dibujado.

Para calcular el trabajo hay que tener en cuenta el valor de la fuerza, el desplazamiento y el ángulo que forma la dirección de la fuerza con el desplazamiento.

Trabajo realizado por $\boldsymbol{F}_{T,C}$: $W = F\,\Delta r \cos\phi = 294 \cdot 0{,}3 \cos 270 = 0$ J.

Trabajo realizado por $\boldsymbol{F}_{S,C}$: $W = F\,\Delta r \cos\phi = 144 \cdot 0{,}3 \cos 90 = 0$ J.

Trabajo realizado por la fuerza de 300 N: $W = F\ \Delta r \cos\phi = 300 \cdot 0{,}3 \cos 30 = 77{,}9$ J.

b) El trabajo permite calcular la transferencia de energía, que en este caso es 77,9 J. La energía suministrada al cuerpo es igual al cambio de su energía cinética, ya que no hay variación de otro tipo de energía.

$$77{,}9 = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} 30\, v_f^2 - \frac{1}{2} 30 \cdot 4^2; \qquad v_f = 4{,}9 \text{ m/s}$$

A.2.- a) Describe los cambios que ocurren a los sistemas y las transferencias de energía que se producen cuando un hombre levanta un saco de patatas de 50 kg desde el suelo a 2 m de altura. Calcula el trabajo realizado por la fuerza que eleva el saco y compáralo con el aumento de energía del saco. ¿De dónde procede esa energía?

b) Calcula el trabajo realizado sobre el saco cuando lo sostenemos a 2 metros de altura.

$W = 1000$ J; $W = 0$

A.3.- a) Para que el trabajo realizado por una fuerza sea nulo, ¿es necesario que sea nula la fuerza? ¿Qué otras posibilidades hay? Pon un ejemplo de cada caso.

b) Un cuerpo de 2 kg gira describiendo un círculo horizontal de 1 m de radio, con una rapidez constante de 4 m/s. ¿Qué fuerza es necesario realizar sobre ese cuerpo para que pueda girar?

c) Calcula el trabajo realizado sobre el cuerpo cuando éste recorre media circunferencia.

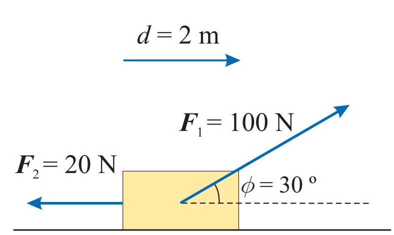
$F = 32$ N, $W = 0$ J

Sobre un cuerpo se pueden ejercer varias fuerzas simultáneamente. Se puede calcular el trabajo asociado a cada una de esas fuerzas siendo el trabajo total realizado sobre el cuerpo la suma de los trabajos asociados a cada fuerza. En la situación representada en la figura, podemos escribir:

$W_1 = 100 \cdot 2 \cdot \cos 30 = 173{,}2$ J

$W_2 = 20 \cdot 2 \cdot \cos 180 = -40$ J

$W_{total} = 133{,}2$ J (realizado sobre el cuerpo)



También podemos calcular el trabajo total calculando el trabajo realizado por la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Para que esto sea correcto es necesario que el punto de aplicación de todas las fuerzas sufra el mismo desplazamiento.

Trabajo y variación de energía

El trabajo está relacionado con las fuerzas. En la unidad anterior hemos diferenciado entre fuerzas interiores y exteriores. Esa diferencia tiene también importancia en el trabajo.

El trabajo asociado a las fuerzas exteriores que se ejercen sobre un sistema mide la transferencia de energía de ese sistema con el exterior. Si el resultado es que al final del proceso el sistema tiene más energía que al principio, quiere decir que el proceso ha supuesto que le hemos dado energía al sistema y entonces el trabajo es positivo. Por el contrario, si el resultado final es que el sistema tiene menos energía que al principio, quiere decir que se le «ha quitado» energía, y por lo tanto, el trabajo es negativo.

a) **Trabajo exterior positivo** sobre el sistema: **aumenta** la energía del sistema.

b) **Trabajo exterior negativo** sobre el sistema: **disminuye** la energía del sistema.

Aunque a veces sólo calculamos la variación de energía que sufre un sistema, debemos tener en cuenta que simultáneamente otro sistema debe estar sufriendo también una variación de energía, de manera que la variación total de energía sea nula. Es decir, si un sistema está ganando energía es porque hay otro sistema que tiene que estar perdiendo energía.

El trabajo asociado a las fuerzas interiores que se ejercen entre sí las diferentes partes de un sistema está relacionado con las transformaciones de energía que ocurren en el interior del sistema. No modifican la energía total del sistema.

El trabajo como producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento

El producto escalar de dos vectores es igual al producto de los módulos de esos vectores por el coseno del ángulo que forman entre sí las direcciones de esos vectores. De acuerdo con esto, el trabajo realizado por una fuerza $\boldsymbol{F}$ cuando su punto de aplicación experimenta un desplazamiento $\Delta\boldsymbol{r}$ se puede calcular como el producto escalar de ambos vectores.

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r}$$

Si escribimos los vectores en función de sus componentes y realizamos su producto escalar, encontramos que ese producto escalar es igual a la suma de los productos de sus componentes.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= F_x\,\boldsymbol{i} + F_y\,\boldsymbol{j} + F_z\,\boldsymbol{k} \\ \Delta\boldsymbol{r} &= \Delta x\,\boldsymbol{i} + \Delta y\,\boldsymbol{j} + \Delta z\,\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \quad W = \boldsymbol{F} \times \Delta\boldsymbol{r} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$$

A.4.- Empujamos a un cuerpo con una fuerza $\boldsymbol{F} = 2\,\boldsymbol{i} - 4\,\boldsymbol{j}$ N. El cuerpo, que se encuentra en el punto (1,5), sufre un desplazamiento $\Delta\boldsymbol{r} = 5\,\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{j}$ m. Calcula el trabajo realizado sobre el cuerpo. Haz una representación gráfica de la situación descrita.

$W = 18$ J

1.2 Cálculo del trabajo cuando la fuerza es variable

Hasta ahora hemos considerado que la fuerza es constante. En el caso más general, la fuerza que actúa puede ser variable, es decir, puede cambiar su valor de un punto a otro; así cuando queremos alargar un muelle, la fuerza que debemos hacer aumenta conforme mayor sea el alargamiento que queramos producir.

Para facilitar la comprensión de cómo realizar el cálculo del trabajo en el caso de una fuerza variable, haremos previamente una interpretación gráfica del cálculo del trabajo en el caso de una fuerza constante.

En la figura 1 hemos representado los valores de fuerzas en ordenadas y la posición x en abcisas. Suponemos que el movimiento se realiza en la dirección del eje X. El trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{F}_1$ cuando se desplaza su punto de aplicación de x_1 a x_2 es igual a la superficie de la figura coloreada, ya que esa figura es un rectángulo cuya altura es el valor de la fuerza, y la base el desplazamiento de su punto de aplicación.

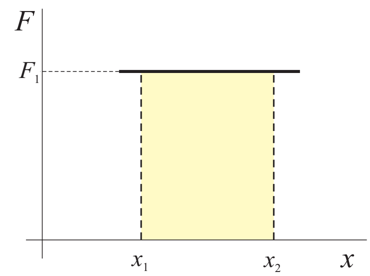


Figura 1

Este resultado es general, sea cual sea la figura determinada por la gráfica que representa los valores de la fuerza para cada posición y el eje horizontal, **su área equivale al trabajo** realizado por la fuerza en el intervalo de posiciones que tomemos.

Consideremos ahora que la fuerza es variable, es decir que va cambiando de valor cuando se desplaza su punto de aplicación.

El problema que nos encontramos es cómo calcular el área de una superficie como la de la figura 2. Una manera de obtener un resultado aproximado, es calcular el área de un rectángulo cuya base sea la de la que corresponde al intervalo de x y la altura sea el valor de F que corresponde al valor medio de la x en el intervalo. Esto puede observarse en la figura 3: el valor de F es el que corresponde al valor central de x en el intervalo, es decir el valor de F para $x = 5$.

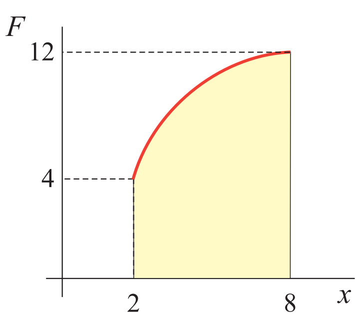


Figura 2

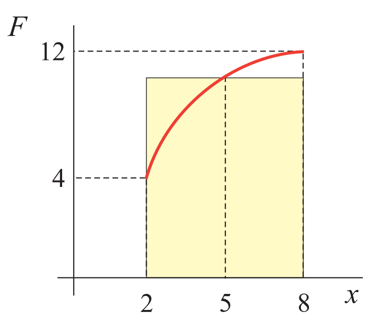


Figura 3

Si queremos que la aproximación sea mejor, lo que podemos hacer es dibujar dos rectángulos, tal como hacemos en la figura 4 y sumar sus áreas. Una aproximación aún mejor sería dibujar 3 rectángulos como en la figura 5, o mejor dibujar 10 como se ve en la figura 6, y así sucesivamente. El área de cada rectángulo la llamaremos dS, ya que es una estimación lineal porque suponemos que en cada intervalo dx ($dx = \Delta x$) la fuerza es constante.

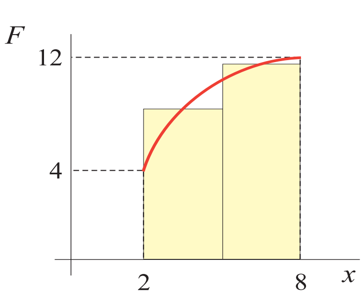


Figura 4

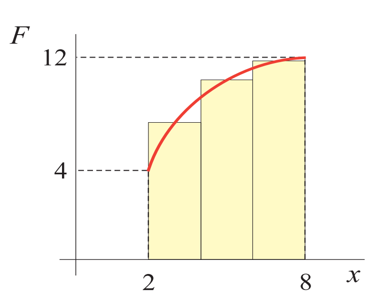


Figura 5

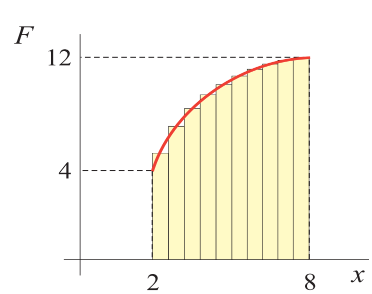


Figura 6

Por tanto, si calculamos el área de cada uno de los rectángulos y sumamos todas las áreas, obtendremos un resultado aproximado del área que estamos buscando. Cuantos más rectángulos dibujemos (cada vez menos anchos) más nos aproximaremos al valor correcto. Podemos escribir lo anterior de la siguiente forma si hemos dibujado N rectángulos:

$S_{\text{aproximada}}$ = suma de las áreas dS de los N rectángulos de base dx y altura el valor de la fuerza que corresponde a la mitad de ese intervalo.

Matemáticamente se puede representar lo anterior:

$$S_{\text{aproximada}} = \sum_{1}^{N} dS_{\text{i}} = \sum_{1}^{N} F_{\text{i}}\, dx_{\text{i}}$$

Cuanto más pequeños sean los intervalos, la suma de las áreas de los pequeños rectángulos se aproximará más al valor del área de la figura original. Iremos pues obteniendo una sucesión de números (al ir aumentando el número N de rectángulos) cuyo límite, cuando N tienda a infinito, será el valor exacto del área de la figura original. Eso se escribe de la forma siguiente:

$$S = \lim \sum_{1}^{N} F_{\text{i}}\, dx_{\text{i}} \qquad \text{cuando} \qquad N \to \infty$$

Aunque pueda parecer que ese valor es imposible de obtener, si conocemos la relación entre el valor de la fuerza y la posición, es decir si conocemos $F = f(x)$, existe una operación matemática que permite obtener de forma sencilla el resultado anterior. Esa operación recibe el nombre de integral de una función entre dos valores. Podemos escribir, teniendo en cuenta que el valor del área S coincide con el trabajo realizado:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\, dx$$

Explicación de cómo se calculan las integrales de algunas funciones sencillas.

A.5.- Supongamos que la fuerza aplicada a un cuerpo varía con la posición x según la expresión: $F = 2 + 2x$. La fuerza tiene siempre la dirección del sentido positivo del eje X.

a) Representa gráficamente el valor de F desde $x = 0$ hasta $x = 6$ m. ¿Es constante el valor de la fuerza?

b) Calcula el valor del trabajo realizado por esa fuerza sobre un cuerpo cuando el punto de aplicación de la fuerza pasa de $x = 0$ a $x = 6$ m. Realiza el cálculo a partir del área y llevando a cabo la integral de Fdx entre $x = 0$ y $x = 6$ m.

$W = 48$ J

A.6.- Supongamos que la fuerza aplicada a un cuerpo varía con la posición x según la expresión: $F = 2x^2$. La fuerza tiene siempre la dirección del sentido positivo del eje X.

a) Representa gráficamente en un papel milimetrado el valor de F desde $x = 0$ hasta $x = 5$ m. ¿Es constante el valor de la fuerza?

b) Calcula el valor del trabajo realizado por esa fuerza sobre un cuerpo cuando el punto de aplicación de la fuerza pasa de $x = 2$ a $x = 5$ m. Realiza el cálculo llevando a cabo la integral de Fdx entre $x = 2$ y $x = 5$ m.

c) Calcula el valor del trabajo a partir del área de la superficie delimitada por el eje X y la línea que representa F para cada valor de x, entre los valores de $x = 2$ y $x = 5$ m. Calcula ese área contando los cuadritos que hay.

$W = 78$ J

En los ejemplos anteriores hemos aprendido a calcular el trabajo cuando la fuerza no es constante. Aunque hemos supuesto que la fuerza y el desplazamiento tenían la misma dirección, no es necesario que así ocurra. En caso de que la fuerza y el desplazamiento formasen un determinado ángulo, tendríamos que multiplicar por el coseno de dicho ángulo o hacer el producto escalar con las componentes.

Consideremos que la fuerza $\boldsymbol{F} = F_x\,\boldsymbol{i} + F_y\,\boldsymbol{j} + F_z\,\boldsymbol{k}$, desplaza su punto de aplicación desde el punto 1, definido por su vector de posición $\boldsymbol{r}_1\ (x_1, y_1, z_1)$, al punto 2, definido por $\boldsymbol{r}_2\ (x_2, y_2, z_2)$. El trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{F}$ en este desplazamiento es:

$$W_1^2 = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

siendo $d\boldsymbol{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}$. Efectuando el producto escalar obtenemos:

$$W_1^2 = \int_{r_1}^{r_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$$

EJEMPLO

Sobre un cuerpo de 3 kg actúa la fuerza $\boldsymbol{F} = 3x\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ desplazándose el cuerpo desde el punto (1,2,2) al punto (0,2,1). Calcula el trabajo realizado por dicha fuerza sobre el cuerpo.

Se trata de hacer la integral:

$$W_1^2 = \int_{1,2,2}^{0,2,1} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) = \int_1^0 3x\,dx + \int_2^1 dz$$

Son integrales definidas cuyo valor se obtiene de la siguiente forma:

$$W_1^2 = \left[3\frac{x^2}{2}\right]_1^0 + [z]_2^1 = \left[3\frac{0^2}{2} - 3\frac{1^2}{2}\right] + (1-2) = -2{,}5\ \text{J}$$

A.7.- Una fuerza variable, cuyo valor en cada punto del espacio viene dado por la expresión $\boldsymbol{F} = 2x\,\boldsymbol{i} + 3y\,\boldsymbol{j} - 2\,\boldsymbol{k}$, actúa sobre un cuerpo que se desplaza desde el punto (1,2,1) hasta el punto (3,1,0). Calcula el trabajo realizado sabiendo que la fuerza está expresada en newtones y la distancia en metros y que el desplazamiento se produce en línea recta.

$W = 5{,}5$ J

2 FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

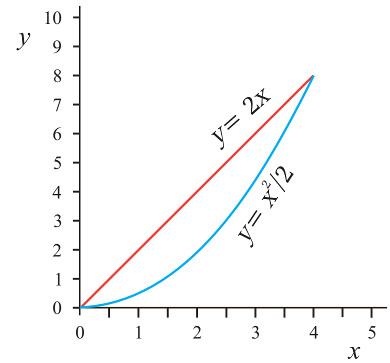
Lo primero que podemos decir es que el nombre de fuerza conservativa no es muy ilustrativo ya que las fuerzas no se conservan. Pueden aparecer y desaparecer en consonancia con que exista o no una interacción. El nombre se refiere a la conservación de la energía mecánica, como veremos más adelante.

Diremos que una **fuerza** es **conservativa** cuando el trabajo realizado por esa fuerza **no** depende de la trayectoria.

Una **fuerza** es **no conservativa** cuando el trabajo realizado por esa fuerza depende de la trayectoria.

Supongamos, como en el dibujo de la figura, que un cuerpo sufre un desplazamiento desde el punto A(0,0) hasta el punto B (4,8). Ese desplazamiento puede hacerlo a través de muchas trayectorias de las que hemos dibujado sólo dos.

¿Será igual el trabajo realizado si el desplazamiento se hace por una u otra trayectoria?



A.8.- Calcula el trabajo realizado por la fuerza variable: $\boldsymbol{F} = 5\,x\,\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{j}$ cuando actúa sobre un cuerpo que se desplaza desde el punto (0,0) hasta el (4,8) por la trayectoria $y = 2x$. Ídem si lo hace por la trayectoria $y = x^2/2$.

$W_1 = 24$ J; $W_2 = 24$ J

A.9.- Calcula el trabajo realizado por la fuerza variable: $F = 5\,y\,\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{j}$, cuando actúa sobre un cuerpo que se desplaza desde el punto (0,0) hasta el (4,8) por la trayectoria $y = 2x$. Ídem si lo hace por la trayectoria $y = x^2/2$.

$W_1 = 64$ J; $W_2 = 37{,}3$ J

EJEMPLO

a) Sobre un cuerpo de 10 kg actúa una fuerza cuyo valor depende de la posición según la expresión $\boldsymbol{F} = 3x\,\boldsymbol{i} + 2y\,\boldsymbol{j}$. El cuerpo se desplaza desde el punto (0,0) al punto (4,4). Indicar si el trabajo realizado por la fuerza depende de que el desplazamiento sea por la trayectoria $y = x$, o por la trayectoria $y = x^2/4$.

Para calcular el trabajo, dado que la fuerza es variable, hay que utilizar la integral correspondiente. Sustituyendo los valores que nos han dado:

$$W_1^2 = \int_{0,0}^{4,4} 3x\,dx + 2y\,dy = \int_0^4 3x\,dx + \int_0^4 2y\,dy = \left[3\frac{x^2}{2}\right]_0^4 + \left[y^2\right]_0^4 = 40 \text{ J}$$

Al resolver la integral no hemos necesitado conocer la trayectoria que ha seguido el cuerpo. Por lo tanto, podemos decir que en este caso el trabajo realizado por la fuerza sobre el cuerpo no depende del camino seguido, o lo que es lo mismo, que la fuerza dada es conservativa.

b) Repetir el ejercicio anterior para el caso de que la fuerza venga dada por la expresión $\boldsymbol{F} = 3x\,\boldsymbol{i} + 2x\,\boldsymbol{j}$. El cuerpo se desplaza entre los mismos puntos (0,0) al (4,4) y por las mismas trayectorias.

El planteamiento es idéntico, sólo que ahora tenemos que realizar las integrales siguientes:

$$W_1^2 = \int_0^4 3x\,dx + \int_0^4 2x\,dy$$

La primera integral es independiente del camino, pero la segunda exige que se haga la sustitución de x en función de y. Esa sustitución depende de la trayectoria, y así tenemos:

Trayectoria: $y = x$: $\quad W_1^2 = \int_0^4 3x\,dx + \int_0^4 2y\,dy = 40$ J

Trayectoria: $y = x^2/4$: en este caso $x = \sqrt{4y}$, y al sustituir queda:

$$W_1^2 = \int_0^4 3x\,dx + \int_0^4 2\sqrt{4y}\,dy = \left[3\frac{x^2}{2}\right]_0^4 + \left[8\frac{y^{3/2}}{3}\right]_0^4 = 45{,}3 \text{ J}$$

En este caso, el trabajo depende del camino recorrido. Por la primera trayectoria el trabajo realizado por la fuerza es de 40 julios, mientras que por la segunda trayectoria el trabajo realizado es de 45,3 julios. Es un ejemplo de fuerza no conservativa.

En unos casos el trabajo realizado sobre el cuerpo no depende de la trayectoria recorrida por el cuerpo mientras que en otros casos el trabajo realizado sobre el cuerpo sí depende de la trayectoria. Que sea de un modo u otro vendrá determinado por el tipo de función $\boldsymbol{F} = f(x, y, z)$.

El que la fuerza sea o no conservativa nada tiene que ver con el principio de conservación de la energía, que se cumple siempre. Si la energía ganada por el cuerpo es diferente según el camino recorrido, será porque el otro sistema que le ha dado energía (que aquí no lo hemos tenido en cuenta), habrá cedido más energía por un camino que por el otro. De esa forma, la energía ganada por el sistema será siempre exactamente igual a la que le habrá dado el otro sistema.

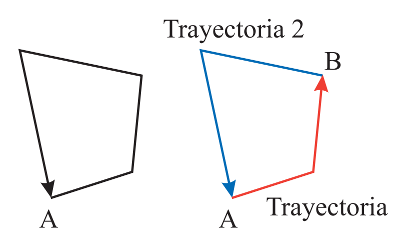
Un ejemplo de fuerza conservativa es la que ejerce la Tierra sobre un cuerpo.

A.10.- Se arrastra un mueble desde una pared a la de enfrente.

a) ¿Se necesitará energía para ese cambio suponiendo que no hay rozamiento? ¿Por qué?

b) En caso de que haya rozamiento, ¿dependerá la energía necesaria del camino que hayamos seguido para trasladar el mueble? ¿Por qué? ¿Son conservativas las fuerzas de rozamiento?

El trabajo realizado por una fuerza conservativa a lo largo de un proceso cíclico es nulo



Supongamos que un cuerpo sometido a una fuerza conservativa describe un proceso cíclico, es decir, un proceso que comienza y termina en la misma posición. Ese trabajo será siempre nulo.

La demostración se basa en que si la fuerza es conservativa el trabajo no depende de la trayectoria; por lo tanto, si la trayectoria comienza y termina en el mismo punto, supongamos el punto A, podemos imaginar esa trayectoria dividida en dos partes, la que va de A a B por la trayectoria 1 y la que vuelve de B a A por la trayectoria 2. (Ver la figura adjunta).

Ahora bien, el trabajo W_A^B será igual por la trayectoria 1 que por la trayectoria 2, pero el trabajo de ir de B a A tiene el signo contrario que el trabajo de ir de A a B, ya que el desplazamiento tiene sentido contrario.

$$W_A^A = W_A^B + W_B^A \text{ y como } W_B^A = -W_A^B$$

Por lo tanto:

$$W_A^A = W_A^B - W_A^B = 0$$

Luego si demostramos que **el trabajo realizado por una fuerza a lo largo de un proceso cíclico es nulo** podemos concluir que **esa fuerza es conservativa**. De hecho, una fuerza conservativa se puede definir de este modo.

3 FUERZAS CONSERVATIVAS Y ENERGÍAS POTENCIALES

El trabajo realizado por una fuerza conservativa entre dos puntos es el mismo independiente de la trayectoria seguida. En tal caso podemos definir una función, que llamaremos energía potencial, de la forma siguiente:

$$W_1^2 = E_{P_1} - E_{P_2} = -\Delta E_P$$

Donde $E_{p_1} - E_{p_2}$ representa la variación de la energía potencial cambiada de signo. Esto quiere decir que se puede asignar a cada punto del espacio un valor de una magnitud escalar (en matemáticas se dice definir una función escalar) de tal forma que la diferencia de valor de esa magnitud en dos puntos coincida con el valor del trabajo que realiza la fuerza conservativa al desplazar su punto de aplicación entre esos puntos.

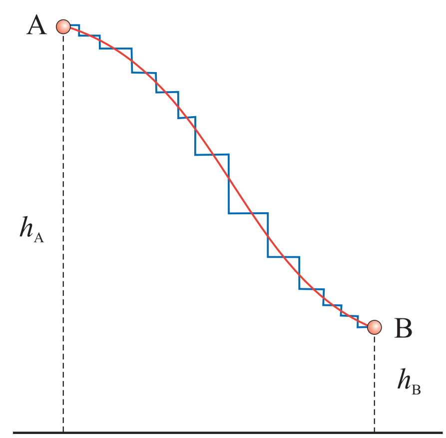
Para que esa función energía potencial esté definida unívocamente es necesario que la fuerza sea conservativa ya que si no lo es, el trabajo variaría al cambiar la trayectoria, y la diferencia de energía también cambaría, es decir, no sería un valor unívocamente definido.

Para cada fuerza conservativa podemos definir una función energía potencial asociada como, por ejemplo, para las fuerzas gravitatorias, las electrostáticas o la fuerza elástica.

Fuerza y energía potencial gravitatorias

Cuando nos referimos a energía potencial gravitatoria el sistema está formado por los cuerpos entre los que existe atracción gravitatoria. Lo más frecuente es que el sistema al que nos refiramos sea el formado por la Tierra y un cuerpo próximo a su superficie. Y aunque a veces hablamos de la energía potencial del cuerpo, en realidad esa energía potencial corresponde al sistema formado por la Tierra y el cuerpo, ya que no tiene sentido hablar de la energía potencial de un cuerpo aislado.

El trabajo W_A^B que realiza la fuerza gravitatoria sobre un cuerpo cuando se desplaza desde el punto A al punto B (en general, entre dos puntos) no depende de la trayectoria seguida, sólo de la diferencia de altura entre esos dos puntos.



Lo anterior es válido sea cuál sea la forma de la trayectoria. Tal como vemos en la figura, una trayectoria curvilínea se puede descomponer en muchos «trocitos» rectilíneos y, según la definición de trabajo, sólo se hace trabajo en los tramos verticales mientras que es nulo el trabajo en los tramos horizontales. **¿Por qué?**

El trabajo total sería la suma de los trabajos hechos en los tramos verticales, por lo que sólo se debe tener en cuenta la «*distancia vertical*», es decir, la diferencia de altura entre los dos puntos.

Si tenemos en cuenta que la fuerza gravitatoria sobre un cuerpo de masa m es mg, el trabajo que realiza se puede calcular mediante el producto de la fuerza por la diferencia de altura, por lo que podemos escribir:

$$W_A^B = -\Delta E_p = E_{pA} - E_{pB} = mgh_A - mgh_B$$

Si el trabajo que hace la fuerza gravitatoria es positivo la energía potencial final del sistema es menor que la inicial, mientras que si el trabajo es negativo la energía potencial final es mayor que la inicial.

Si asignamos por convenio, un valor nulo a la energía potencial ($E_p = 0$) cuando el cuerpo se encuentra sobre la superficie terrestre, la energía potencial a una altura h se puede calcular con la expresión:

$$E_p = mgh$$

La expresión anterior sólo es válida cuando la altura es pequeña. Más adelante obtendremos una expresión general para la energía potencial gravitatoria.

De forma general, a partir de

$$E_{pA} - E_{pB} = mgh_A - mgh_B$$

sólo podemos deducir que

$E_{pA} = mgh_A + C$ y $E_{pB} = mgh_B + C$

El valor de la constante C no podemos conocerlo a no ser que pongamos una condición adicional. Además del convenio al que se alude en el texto, otras veces se considera que la energía potencial es nula a una distancia infinita de la Tierra. En ese caso se obtiene para C un valor diferente de cero, como veremos en el capítulo 2.

Fuerza y energía potencial elásticas

Las sustancias elásticas cumplen la ley de Hooke, siempre que estemos dentro del intervalo en el que el cuerpo se comporta como elástico. La ley de Hooke es una ley experimental y establece que la fuerza con la que el cuerpo elástico se opone a su deformación es proporcional a la misma.

$$\boldsymbol{F} = -k\,\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{F}$ es la fuerza que opone el cuerpo elástico a ser deformado, $\boldsymbol{x}$ es la **deformación** producida (alargamiento o acortamiento) y k es una constante que depende de la naturaleza del muelle. El signo – indica que la fuerza tiene sentido contrario a la deformación.

El valor de k nos indica si el muelle es «duro» o «blando»; un valor alto significa que se necesita una gran fuerza para deformar el muelle una unidad de longitud; sería un muelle duro. Un valor bajo indicaría que se necesita una fuerza pequeña para deformar al muelle, lo que podría interpretarse como un muelle blando.

A veces la ley de Hooke se escribe $\boldsymbol{F} = k\,\boldsymbol{x}$. En ese caso, la fuerza que se está considerando es la que hacemos sobre el muelle para deformarlo, que lógicamente tiene el mismo sentido que la deformación que queremos producirle.

Modelo simplificado de muelle

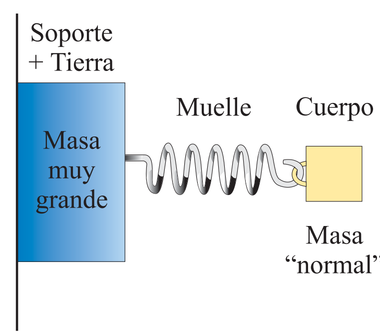
El sistema real en el que suele utilizarse un muelle está formado por tres cuerpos. El muelle, el soporte al que está unido y el cuerpo que está unido al muelle. Lo más frecuente es que tanto el soporte (que a su vez está unido a la Tierra) como el cuerpo al que está unido el muelle tengan una masa mucho mayor que la del muelle.

Para simplificar los problemas supondremos que los muelles no tienen masa. En caso de que se tenga en cuenta la masa del muelle, lo trataremos como un muelle sin masa unido a un cuerpo cuya masa es igual a la del muelle.

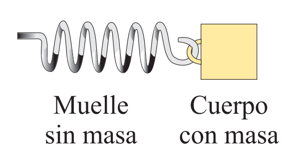
¿Qué papel juega el soporte? En las situaciones normales, el soporte está unido a la Tierra, por lo que la masa del mismo es casi infinita en relación a la del sistema muelle-cuerpo. Esa masa tan grande hace que ese sistema prácticamente no sufra cambios, por lo que su energía no cambia y por lo tanto no es necesario tenerlo en cuenta en los «balances energéticos», puesto que su energía final es igual a su energía inicial.

¿Cuándo debemos tener en cuenta ese tercer cuerpo? Cuando su masa sea comparable con las otras. Así, en un muelle comprimido en contacto con dos carritos de masas semejantes el soporte sería uno de los carritos, que sí experimentará cambios energéticos y que debe ser tenido en cuenta en los balances energéticos.

Sistema real



Modelo de muelle



Energía potencial elástica

Como vimos en primero de bachillerato, el trabajo que realiza una fuerza elástica cuando a un muelle se le desplaza su extremo libre desde la posición x_1 a la x_2 es:

$$W_1^2 = -\Delta E_p = E_{p_1} - E_{p_2} = \frac{1}{2}k\,x_1^2 - \frac{1}{2}k\,x_2^2$$

Por lo tanto, $E_{p1} = 1/2\; kx_1^{\,2} + C$ y $E_{p2} = 1/2\; kx_2^{\,2} + C$. Si adoptamos el convenio: la energía potencial elástica es nula cuando $x = 0$, es decir, cuando no haya cambio en la longitud del muelle, podemos calcular la energía potencial elástica con la expresión:

$$E_p = \frac{1}{2}k\,x^2$$

EJEMPLO

Un muelle se estira 5 cm cuando de él colgamos un cuerpo de 10 kg. Calcula el trabajo realizado por la fuerza elástica si comprimimos el muelle 5 cm. ¿Cuál será la variación de energía potencial elástica? ¿Qué trabajo realizará la fuerza elástica si una vez comprimido esos 5 cm, lo comprimimos otros 5 cm más? (Toma g = 10 N/kg)

Para calcular la constante elástica sabemos que si se tira del muelle con 100 N, éste se alarga en $x = 0{,}05$ m.

$$k = \frac{F}{x} = \frac{100}{0{,}05} = 2000 \text{ N/m}$$

El trabajo realizado por la fuerza elástica al comprimir el muelle 5 cm desde su posición de equilibrio es:

$$W_{\text{Fela}} = \int_{0{,}00}^{-0{,}05} -2000x\, dx = \left[-1000x^2\right]_{0{,}00}^{-0{,}05} = -2{,}5 \text{ J}$$

La variación de energía potencial elástica será $\Delta E_{\text{Pela}} = -W_{\text{Fela}} = 2{,}5$ J

El trabajo realizado por la fuerza elástica al comprimir el muelle otros 5 cm más es:

$$W_{\text{Fela}} = \int_{-0{,}05}^{-0{,}10} -2000x\, dx = \left[-1000x^2\right]_{-0{,}05}^{-0{,}10} = -7{,}5 \text{ J}$$

Se necesita más energía para comprimir los 5 últimos centímetros que los 5 primeros. La energía que gana el muelle queda almacenada en el mismo en forma de energía potencial elástica. Esta energía puede devolverla el muelle cuando vuelva a su posición original.

En la resolución hemos calculado el trabajo realizado por la fuerza elástica, pero el muelle no se habrá comprimido solo. ¿Qué trabajo exterior se habrá realizado sobre el muelle? ¿Qué relación hay entre el W_{ext} y la $\Delta E_{\text{Pelástica}}$?

A.11.- a) Un muelle de 20 cm de longitud y una determinada constante elástica lo estiramos 5 cm, para lo que hemos tenido que hacer un trabajo de 50 J. El trabajo necesario para estirar 5 cm otro muelle de 40 cm de longitud y la misma constante elástica ¿será mayor, menor o igual a 50 J? ¿Por qué?

b) Un muelle de 20 cm de longitud y una determinada constante elástica lo estiramos 5 cm, para lo que hemos tenido que hacer una fuerza máxima de 2000 N y un trabajo de 50 J.

* La fuerza máxima necesaria para estirar ese mismo muelle 10 cm ¿será mayor, menor o igual a 4000 N? Explica la respuesta.

* El trabajo necesario para estirar 10 cm ese mismo muelle ¿será mayor, menor o igual a 100 J? Explica la respuesta.

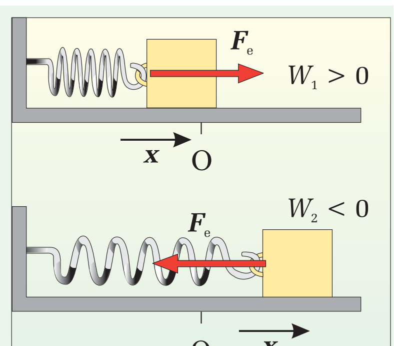
a) W = 50 J; b) F = 4000 N; W > 100 J

A.12.- Calcula el trabajo que debe realizarse sobre un muelle de 30 cm para acortar su longitud 5 cm sabiendo que si colgamos del muelle, cuando está libre, un cuerpo de 20 kg, consigue alargarlo 2 cm. (Toma g = 10 N/kg)

W = 12,5 J

EJEMPLO

Un muelle inicialmente comprimido 4 cm, describe un ciclo completo. Cuando termine un ciclo completo, es decir, cuando vuelva a estar como al principio, ¿qué trabajo habrá realizado la fuerza elástica?



Podemos distinguir 4 etapas:

a) El muelle empuja al cuerpo hasta la posición de equilibrio; la fuerza y el desplazamiento tienen el mismo sentido. Se realiza un trabajo W_1.

b) Debido a la inercia del cuerpo, el muelle se alarga 4 cm; la fuerza y el desplazamiento tienen sentido contrarios. Se realiza un trabajo W_2.

c) El muelle tira del cuerpo hasta la posición de equilibrio; la fuerza y el desplazamiento tienen el mismo sentido. Se realiza un trabajo W_3.

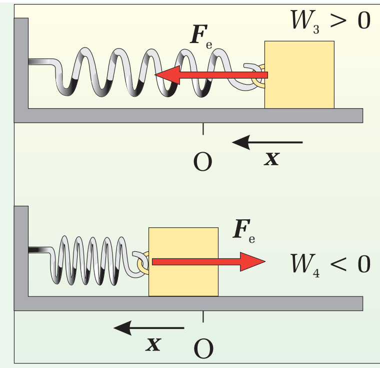
d) Debido a la inercia del cuerpo, el muelle se acorta 4 cm; la fuerza y el desplazamiento tienen sentido contrarios. Se realiza un trabajo W_4.

En las etapas a) y d) se cumple que $W_1 = -W_4$ ya que la fuerza tiene el mismo valor en un caso que en otro, sólo que el desplazamiento tiene sentido contrario.

En las etapas b) y c) se cumple que $W_2 = -W_3$ ya que la fuerza tiene el mismo valor en un caso que en otro, sólo que el desplazamiento tiene sentido contrario.

Puesto que el trabajo total en el ciclo será la suma de los trabajos en cada etapa:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = W_1 + W_2 - W_2 - W_1$$



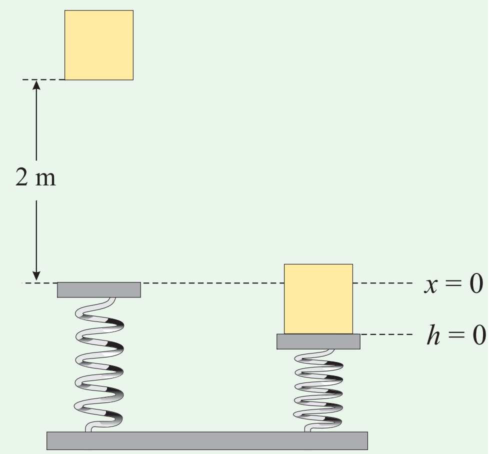
EJEMPLO

Un cuerpo de 4 kg cae desde una altura de 2 m sobre un muelle cuya constante elástica es 14 000 N/m.

a) Calcula el acortamiento máximo del muelle.

b) ¿Qué velocidad tendrá el cuerpo justo en el momento en el que la disminución de la longitud del muelle sea igual a la mitad de la máxima?

c) ¿Qué aceleración tendrá en ese instante?



Cuando un sistema está aislado la energía de mismo será constante. En este caso podemos considerar que el sistema está formado por: la Tierra, el cuerpo de 4 kg y el muelle.

a) En la situación inicial el cuerpo está parado 2 m por encima del extremo superior del muelle. En la situación final, el cuerpo está parado en contacto con el extremo superior del muelle, que se ha acortado una distancia x.

Puesto que tendremos que calcular energías potenciales, debemos establecer niveles que sirvan de referencia. En la figura podemos observar que se ha tomado como referencia para la energía potencial elástica, la posición del extremo superior del muelle cuando está en su longitud normal, que es la que generalmente se usa. Para evitar cantidades negativas se ha tomado como referencia para la energía potencial gravitatoria la altura del muelle cuando está en la posición de máxima compresión. Podíamos tomar otras referencias distintas e incluso tomar una sola referencia para ambas energías potenciales pero las escogidas facilitan los cálculos.

El sistema considerado no intercambia energía durante esa transformación si despreciamos el posible rozamiento con el aire mientras cae el cuerpo. La energía de la situación inicial será igual a la energía de la situación final.

$$\left(E_{p_g} + E_{p_e} + E_c\right)_{\text{inicial}} = \left(E_{p_g} + E_{p_e} + E_c\right)_{\text{final}}$$

$$4 \cdot 9{,}8(2 + x) + 0 + 0 = 0 + \frac{1}{2}14000\,x^2 + 0$$

Resuelta la ecuación anterior se obtiene que $x = 0{,}109$ m. Eso supone que el muelle se ha acortado en 10,9 cm y el cuerpo ha caído 2,109 m.

b) La situación inicial podemos considerar la misma que en el apartado anterior. La situación final es cuando el muelle se ha acortado la mitad que aproximadamente es 5,5 cm. Pero ahora, la velocidad del cuerpo no es nula, por lo que la ecuación que podemos plantear es:

$$\left(E_{p_g} + E_{p_e} + E_c\right)_{\text{inicial}} = \left(E_{p_g} + E_{p_e} + E_c\right)_{\text{final}}$$

$$4 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}109 + 0 + 0 = 4 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}0545 + \frac{1}{2}14000 \cdot (0{,}0545)^2 + \frac{1}{2}4v^2$$

Resuelta la ecuación se obtiene $v = 5{,}47$ m/s. Se puede comprobar que esa velocidad es menor que aquella con la que el cuerpo llega al nivel del muelle. Es lógico que sea así, pues parte de la energía cinética que lleva el cuerpo ha pasado a ser energía potencial elástica del muelle.

c) Para calcular la aceleración del cuerpo en ese instante aplicaremos la segunda ley de la dinámica. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son: la atracción de la Tierra, $-39{,}2\,\boldsymbol{j}$ N, y la fuerza con la que el muelle le empuja, $-k\Delta\boldsymbol{x}$, $770\,\boldsymbol{j}$ N. La suma de ambas es $730{,}8\,\boldsymbol{j}$ N, por lo que la aceleración del cuerpo será:

$$\boldsymbol{a} = \frac{730{,}8\,\boldsymbol{j}}{4} = 182{,}7\,\boldsymbol{j}\ \text{m/s}$$

Esa aceleración está dirigida hacia arriba, tiene sentido contrario al de la velocidad, y corresponde a que está frenando al cuerpo.

A.13.- Un muelle cuya constante elástica es 12 000 N/m se encuentra comprimido 4 cm. Se utiliza para lanzar verticalmente un cuerpo de 10 kg. Calcula la velocidad que lleva la bola justo cuando el muelle pasa por la posición de equilibrio (toma g = 10 N/kg). Considera el muelle como si no tuviese masa. Resuélvelo utilizando el principio de conservación de la energía

v = 1,06 m/s

A.14.- Un cuerpo de 1 kg se encuentra inicialmente en reposo a una altura de 2 m por encima del extremo libre de un resorte vertical, cuyo extremo inferior está fijo. Se deja caer el cuerpo sobre el resorte y, después de comprimirlo, vuelve a subir. El resorte tiene una masa despreciable y una constante elástica k = 200 Nm^{-1}.

a) Haz un análisis energético del problema y justifica si el cuerpo llegará de nuevo al punto de partida.

b) Calcula la máxima compresión que experimenta el resorte. (g = 10 N/kg)

x = 0,5 m

4 TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS

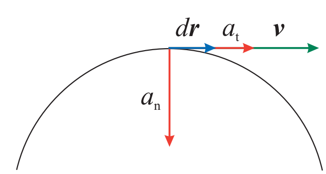
Llamado en algunos libros teorema del trabajo-energía. En la forma que lo vamos a presentar es válido sólo para una partícula o para cuerpos que puedan ser considerados como una partícula, es decir, que sean indeformables.

El trabajo externo realizado por la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido es igual a la variación de energía cinética que experimenta dicho cuerpo.

Para demostrarlo tendremos en cuenta que $\sum\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ siendo $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$, y que $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt$. Podemos calcular el trabajo de la forma siguiente:

$$W_1{}^2 = \int_1^2 \Sigma\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_1^2 m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}dt = \int_1^2 m\boldsymbol{a_t}\cdot v\boldsymbol{dt} + \int_1^2 m\boldsymbol{a_n}\cdot v\boldsymbol{dt}$$

En la primera integral encontramos el producto escalar de dos vectores que tienen la misma dirección $\boldsymbol{a}_t \,||\, \boldsymbol{v}$, por lo que el producto escalar será igual al producto de los módulos de ambos vectores. La segunda integral se anula puesto que la aceleración normal es perpendicular a la velocidad $\boldsymbol{a}_n \perp \boldsymbol{v}$, y por lo tanto su producto escalar es nulo. Así pues, podremos escribir:



$\boldsymbol{a}_t \cdot \boldsymbol{v} = a_t\, v \cos 0 = a_t\, v$

$$W_1^2 = \int_1^2 m a_t\, v dt = \int_1^2 m\frac{dv}{dt} v dt = \int_1^2 m v\, dv = \frac{1}{2} m\, v_2^2 - \frac{1}{2} m\, v_1^2$$

$$W_1^2 = E_{c_2} - E_{c_1} = \Delta E_c$$

En el enunciado del teorema de las fuerzas vivas nos hemos referido a cuerpos rígidos. En el caso de un cuerpo deformable las diferentes partes pueden sufrir desplazamientos distintos. Por eso, el desplazamiento que debemos considerar es el del centro de masas del cuerpo. Pero en ese caso, al producto escalar de la suma de las fuerzas exteriores por el desplazamiento del centro de masas, no se le puede llamar trabajo, ya que no es coherente con la definición que se ha hecho del trabajo, en el que el desplazamiento que se tiene en cuenta es el del punto de aplicación de la fuerza.

Un enunciado del teorema de las fuerzas vivas aplicable en todos los casos es:

> El producto escalar de la suma de todas las fuerzas que se ejercen sobre un sistema por el desplazamiento del centro de masas del mismo es igual a la variación de su energía cinética.

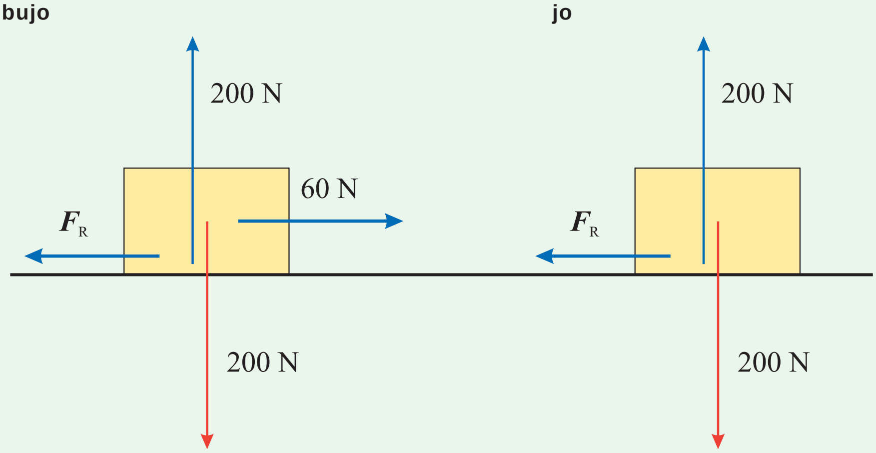
Podemos aplicar el teorema de las fuerzas vivas a situaciones en las que existe rozamiento. En este caso, los cuerpos no son rígidos, por lo que tendremos que prestar mucha atención tanto al lenguaje que empleemos como, lo que es más importante, al significado de los cálculos que hagamos. Al producto de la fuerza de rozamiento por el desplazamiento del cuerpo, no podremos llamarle trabajo de la fuerza de rozamiento, ya que el trabajo real de estas fuerzas nos indica además de la pérdida de energía cinética que pueda sufrir un cuerpo la variación de energía interna del cuerpo que se desplaza y de la superficie con la que roza, ya que las dos superficies que rozan, se calientan.

EJEMPLO

Una caja de 20 kg está en reposo sobre un piso plano. Se le empuja con una fuerza horizontal de 60 N mientras recorre 3 m. Luego, cesa la fuerza de 60 N y la caja continúa deslizándose 1 m más. Calcula el coeficiente de rozamiento entre el material de la caja y el del suelo (toma g = 10 N/kg).

En los tres primeros metros las fuerzas aplicada sobre el cuerpo son las representadas en este dibujo

En el último metro las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo son las representadas en este dibujo



Dado que la caja está en reposo al principio y al final del proceso, la variación de energía cinética es nula por lo que, aplicando el teorema de las fuerzas vivas, el producto de la suma de las fuerzas que actúan por el desplazamiento del cuerpo también será nulo.

$$0 = 60 \cdot 3 \cos 0 + F_r \cdot 4 \cos 180; \qquad F_r = 45 \text{ N}$$

El valor de la fuerza de rozamiento será el máximo posible ya que hay deslizamiento relativo entre ambas superficies. Así, podremos escribir:

$$F_r = 45 = \mu \cdot N = \mu \cdot 200; \quad \mu = 0{,}225$$

Este ejercicio se podría haber resuelto también por consideraciones dinámicas, pero esa forma habría sido más compleja. Inténtalo.

A.15.- Sobre un cuerpo de 20 kg ejercemos una fuerza vertical hacia arriba de 300 N. Calcula la velocidad que tendrá cuando haya subido 5 m. Resuelve el ejercicio utilizando consideraciones dinámicas y energéticas (g = 9,8 N/kg).

v = 7,2 m/s

A.16.- Un fusil tiene un cañón de 1 m de longitud. Cuando disparamos una bala de 100 g, se ejerce sobre ella una fuerza cuyo valor viene dado por $F = 300 - 200\,x$ (F en newtones y x en metros). Calcula la velocidad de la bala cuando sale del fusil.

v = 63,2 m/s

A.17.- Se lanza un cuerpo de 20 kg con una rapidez inicial de 3 m/s para que descienda por un plano inclinado 10 º. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es de 0,2. Calcula la velocidad del cuerpo cuando haya recorrido 2 m (toma g = 10 N/kg).

v = 2,84 m/s

5 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Se denomina **energía mecánica**, E_m, a la suma de la energía cinética, de la energía potencial gravitatoria y de la energía potencial elástica.

$$E_m = E_c + E_{pg} + E_{pe}$$

En este apartado consideraremos sistemas* que no intercambian energía con el exterior, por lo que su energía total permanece constante. Tenemos dos posibilidades:

* Consideraremos sistemas que no cambian su estructura química, es decir, sistemas en los que no ocurren reacciones químicas

El trabajo es realizado sólo por fuerzas conservativas

El trabajo asociado a una fuerza conservativa es igual a la variación de energía potencial del sistema cambiada de signo: $W_{\text{fuerza conservativa}} = -\Delta E_p$

Por otro lado, según el teorema trabajo-energía cinética: $W = \Delta E_c$.

Cómo el único trabajo que se realiza en ese sistema es $W_{\text{fuerza conservativa}}$ podemos escribir:

$$-\Delta E_p = \Delta E_c \text{ es decir, } \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_m = 0$$

Si hubiesen dos o más fuerzas conservativas, el trabajo realizado por cada una sería igual a la correspondiente variación de energía potencial cambiada de signo. Así:

$$W = (-\Delta E_{p1}) + (-\Delta E_{p2}) = \Delta E_c$$

$$\Delta E_{p_1} + \Delta E_{p_2} + \Delta E_c = \Delta E_m = 0$$

Tal resultado es conocido como **principio de conservación de la energía mecánica** y es el origen del nombre «fuerza conservativa.»

Si en un sistema sólo realizan trabajo las fuerzas conservativas su energía mecánica se conserva.

A.18.- Una piedra está en reposo a 3 metros del suelo. Calcula la velocidad cuando, al caer, esté a 1 metro del suelo. ¿Cuál será en ese instante la velocidad de la Tierra? Justifica tu respuesta.

v = 6,26 m/s

A.19.- Sobre un sistema sólo actúan fuerzas conservativas internas. Si el trabajo realizado por esas fuerzas es de 50 J:

a) ¿Cuál ha sido la variación de las energías potenciales asociadas a esas fuerzas conservativas? ¿Cuál será la energía potencial final? Si el trabajo de las fuerzas conservativas internas del sistema ha sido positivo, ¿la energía potencial final será mayor, menor o igual que al principio?

b) ¿Cuál ha sido la variación de la energía cinética del sistema? ¿Cuál es la energía cinética total final del sistema? ¿La energía cinética final será mayor menor o igual que al principio?

a) $\Delta E_p = -50$ J; b) $\Delta E_c = 50$ J

A.20.- Un muelle cuya constante elástica es de 2000 N/m lo mantenemos comprimido 12 cm respecto a su longitud de equilibrio. Está colocado verticalmente y en su extremo superior hay colocada una bola de 200 gramos. Dejamos libre el muelle y éste empuja la bola que comienza a subir.

a) Calcula la rapidez de la bola cuando haya subido 1 metro respecto a su posición original. ($g = 9{,}8$ N/kg)

b) Calcula la máxima altura a la que podrá subir la bola.

a) $v = 11{,}15$ m/s; b) $h = 7{,}35$ m

A.21.- Un muelle cuya constante elástica es de 4000 N/m lo mantenemos comprimido 10 cm respecto a su longitud de equilibrio. Está colocado horizontalmente y en sus extremos se encuentra en contacto con dos bolas, una de 200 g y la otra de 400 g. Dejamos libre el muelle y empuja a las bolas que se ponen en movimiento. Suponiendo que no hay fuerzas de rozamiento:

a) Calcula la energía cinética total de las dos bolas después de ser lanzadas por el muelle. (Suponer que el muelle no tiene masa).

b) Sólo con los datos anteriores, ¿se puede calcular la velocidad de cada una de las bolas? Explica por qué.

c) Puesto que suponemos que es nula la suma de las fuerzas exteriores actuando sobre el sistema, ¿qué le debe ocurrir a la cantidad de movimiento total del sistema? Únicamente con ese dato, ¿se puede calcular la velocidad final de cada bola?

d) ¿Cómo se podría calcular la velocidad final de cada bola? Realiza el cálculo.

a) $E_c = 20$ J; d) $v_{1x} = 5{,}77$ m/s; $v_{2x} = -11{,}54$ m/s

Trabajo de fuerzas no conservativas

Si en un sistema rígido actúan fuerzas no conservativas la energía mecánica no se conserva. Consideremos el caso de que actúen dos fuerzas conservativas F_1 y F_2, y una no conservativa F_3, sobre un sistema. De acuerdo con el teorema de las fuerzas vivas podemos escribir para calcular el trabajo total realizado sobre el sistema:

$$W = W_{c1} + W_{c2} + W_{nc} = \Delta E_c$$

Al trabajo de cada fuerza conservativa le podemos asociar una variación de energía potencial, por lo que podemos escribir:

$$(-\Delta E_{p1}) + (-\Delta E_{p2}) + W_{nc} = \Delta E_c$$

$$\Delta E_{p_1} + \Delta E_{p_2} + \Delta E_c = \Delta E_m = W_{nc}$$

El resultado anterior nos indica que:

El trabajo realizado por fuerzas no conservativas que actúan sobre un sistema rígido es igual a la variación de energía mecánica del sistema.

Algunos autores denominan lo anterior como teorema generalizado del trabajo-energía y tiene bastantes aplicaciones ya que sólo se necesita calcular el trabajo de las fuerzas no conservativas.

La más común de estas fuerzas es la de rozamiento por deslizamiento, pero siempre ocurre entre sistemas deformables como ya vimos en el teorema de las fuerzas vivas. De forma similar podemos decir que la ecuación anterior es válida también para sistemas deformables que rozan siempre que no hablemos de trabajo de las fuerzas no conservativas y nos refiramos simplemente al producto escalar de la suma de todas las fuerzas por el desplazamiento del sistema:

$$\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = \Delta E_{\mathrm{m}}$$

A.22.- Un cuerpo de 5 kg desliza por una superficie de hielo con una rapidez de 3 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre el hielo y el cuerpo es 0,05, determina la distancia que recorre el cuerpo antes de pararse. (g = 10 N/kg)

d = 9 m

A.23.- Sobre un caja de 4 kg que reposa sobre una superficie horizontal, actúa una fuerza paralela al plano de 50 N. Si el coeficiente de rozamiento caja-superficie vale 0,2, calcula la rapidez que tendrá la caja al ser empujada a lo largo de una distancia de 5 m. (g = 10 N/kg)

v = 10,2 m/s

RESUMEN

1. El trabajo realizado por una fuerza nos indica la variación de energía de un sistema (si la fuerza es externa) o la conversión de una forma de energía en otra dentro del sistema (si la fuerza es interna). Se calcula, si es constante la fuerza, mediante el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento de su punto de aplicación:

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = F\,\Delta r \cos \phi = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

2. El trabajo realizado por una fuerza **variable** es igual al área comprendida bajo la curva que representa la fuerza en función de la posición, y se calcula mediante la integral definida entre las posiciones inicial y final:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

3. Llamamos fuerzas conservativas a aquellas que realizan un trabajo que no depende de la trayectora que siga su punto de aplicación, solamente depende del punto inicial y final. También las podemos definir como aquellas que realizan un trabajo nulo en un proceso cíclico o trayectoria cerrada. Debido a esto, podemos asociar una función escalar, la energía potencial, de forma que el trabajo realizado sea igual a menos la variación de energía potencial, es decir a la diferencia de energía potencial en el estado inicial y en final:

$$W_1^{\,2} = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2}$$

4. No se pueden conocer valores absolutos de energía potencial, sólo diferencias de valores de energía potencial. Si ponemos la condición de que la energía potencia gravitatoria sea nula en la superficie terrestre o en el punto de equilibrio de un muelle cuando no es estirado ni comprimido, podemos calcular la energía potencial gravitatoria y la energía potencia elástica con las siguientes expresiones:

$$E_{\mathrm{p}} = mgh \qquad\qquad E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} k\, x^2$$

5. El trabajo realizado por la **suma** de todas las fuerzas externas que actúan sobre un **sistema rígido** es igual a la variación de energía cinética de ese sistema (teorema de las fuerzas vivas o trabajo-energía):

$$W_{\mathrm{ext}} = \Delta E_{\mathrm{c}}$$

6. Si el sistema es deformable sólo podemos decir que el producto escalar de la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre un sistema por el desplazamiento de su centro de masas es igual a la variación de energía cinética del mismo.

7. A la suma de la energía cinética, potencial gravitatoria y potencial elástica de un sistema se le llama energía mecánica de ese sistema.

8. Si en el sistema sólo actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica del sistema permanece constante.

$$\Delta E_{\mathrm{m}} = 0$$

9. Si en un sistema actúan fuerzas no conservativas cambia la energía mecánica. Eso no significa que no se siga cumpliendo el principio de conservación de la energía, sino que habrá transformación de energía mecánica en otro tipo de energía. El trabajo de las fuerzas no conservativas será igual a la variación de energía mecánica del sistema:

$$W_{\mathrm{nc}} = \Delta E_{\mathrm{m}}$$

10. Si el sistema es deformable la expresión anterior se puede usar aunque no sea exactamente el trabajo sino el producto escalar de la suma de todas las fuerzas por el desplazamiento del sistema:

$$\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = \Delta E_{\mathrm{m}}$$

ACTIVIDADES DE RECAPITULACIÓN

A.1.- a) ¿Por qué el trabajo realizado al elevar un cuerpo entre dos puntos es mayor cuando el movimiento es acelerado?

b) ¿Es posible ejercer una fuerza que realiza trabajo sobre un cuerpo sin aumentar su energía cinética? Dar un ejemplo.

c) Un cuerpo se mueve en un círculo con una rapidez constante, ¿realiza algún trabajo la fuerza que produce su aceleración? ¿Por qué?

A.2.- ¿Puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza? Razónalo y explica su significado físico. ¿Puede ser negativa la energía cinética? ¿Puede ser negativa la energía potencial? En caso afirmativo, explica su significado físico.

A.3.- Una piedra atada al extremo de una cuerda de 50 cm tiene una masa de 1960 gramos, gira a la velocidad de 2 vueltas/segundo. a) ¿Cuál es su energía cinética? b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza centrípeta en una vuelta?

$E_c = 38{,}7$ J; $W = 0$ J

A.4.- Imagínate un muelle que hemos comprimido. Eso significa que le hemos dado una determinada energía. Imagina ahora que ese muelle comprimido lo metemos en una disolución de ácido sulfúrico de forma que el ácido ataca al metal y destruye al muelle. Al destruirse el muelle, ¿se pierde la energía potencial elástica del mismo? ¿No se cumple el principio de conservación de la energía? Explica tu respuesta.

A.5.- El cañón de una escopeta tiene una longitud de un metro y la fuerza que impulsa el proyectil es $F = 20 - 10\,x$, expresado F en N y x en m. La masa del proyectil es de 5 g. Calcula:

a) El trabajo realizado por la fuerza en el interior del cañón.

b) La velocidad del proyectil cuando sale del cañón.

$W = 15$ J; $v = 77{,}5$ m/s

A.6.- Queremos subir un cuerpo de 10 kg por un plano inclinado 30 º que tiene una longitud de 4 metros. Tiramos de él con una fuerza de 100 N, constante y paralela al plano. El coeficiente de rozamiento cuerpo-plano es 0,1.

a) Calcula el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

b) La velocidad que tiene el cuerpo al llegar a lo alto del plano. (toma $g = 10$ N/kg)

$W_{100} = 400$ J; $W_{\mathrm{peso}} = -200$ J; $F_{\mathrm{roz}} \cdot d = -34{,}6$ J; $v = 5{,}7$ m/s

A.7.- Una bala de 15 g atraviesa la pared de una embarcación. Sabiendo que el espesor de dicha pared es 7,5 cm y que la rapidez de la bala antes y después de atravesar la pared es de 2500 km/h y 600 km/h, calcula la fuerza media ejercida por la bala sobre la embarcación.

$F = 45\,448$ N

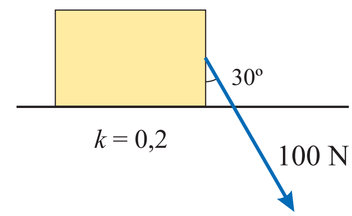
A.8.- En la situación representada en la figura, calcula, tomando $g = 9,8$ N/kg:

a) El trabajo realizado por la fuerza de 100 N sobre el cuerpo cuando éste ha recorrido 1 metro.

b) La variación de la energía cinética del cuerpo en ese intervalo.

c) ¿Cómo se explica la diferencia entre el trabajo y la variación de energía cinética?

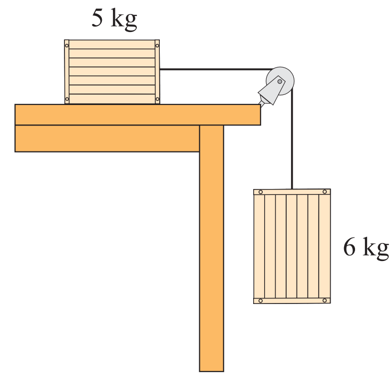
$W = 50$ J; $\Delta E_c = 13,1$ J



A.9.- En un dispositivo como el de la figura, el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo de 5 kg y el suelo es 0,2. Calcula la velocidad del conjunto cuando el cuerpo de 6 kg haya descendido 2 metros despreciando la influencia de la polea y de la cuerda.

Resuelve el ejercicio usando consideraciones energéticas.

$v = 4,3$ m/s



A.10.- Una fuerza de 200 N, constante en magnitud y dirección, actúa sobre un cuerpo de 10 kg que se encuentra en la parte más baja de un plano de 30 º de inclinación y 100 m de longitud. Si la fuerza es siempre paralela al plano calcular el tiempo que debe estar actuando para que el cuerpo llegue justamente a lo alto del plano.

$t = 1,83$ s

A.11.- Sobre un cuerpo actúa una fuerza $\boldsymbol{F} = 3x\,\boldsymbol{i} + 6y\,\boldsymbol{j}$ desplazándose el cuerpo a lo largo de la línea $y = 2x$ desde el punto (0,0) hasta el (1,2). Calcula el trabajo realizado sobre el cuerpo. En este caso, ¿depende el trabajo de la trayectoria seguida? ¿Por qué puedes afirmarlo?

$W = 13,5$ J; No

A.12.- Un proyectil de 40 gramos, animado de una rapidez de 600 m/s, choca contra un blanco. Sabiendo que la resistencia media que éste le ofrece es de 18 000 N ¿hasta que profundidad se incrustará el proyectil?

$d = 40$ cm

A.13.- Identifica los posibles errores que haya en las siguientes frases:

a) El trabajo es una magnitud vectorial puesto que es el producto de dos vectores.

b) El trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo es igual a la variación de la energía cinética de ese cuerpo.

A.14.- El trabajo realizado por las fuerzas conservativas de un sistema cuya masa es 4 kg a lo largo de un determinado proceso es de –100 J. Suponiendo que el trabajo de las fuerzas exteriores es nulo, calcula:

a) La ΔE_{p} del sistema a lo largo del proceso y la E_{p} del sistema al final del proceso.

b) La ΔE_{c} del sistema a lo largo del proceso y la E_{c} del sistema al final del mismo.

c) La ΔE_{m} del sistema a lo largo del proceso y la E_{m} del sistema al final del mismo.

a) $\Delta E_{\mathrm{p}} = 100$ J; $E_{\mathrm{p\ al\ final}}$ no se sabe; b) $\Delta E_{\mathrm{c}} = -100$ J; $E_{\mathrm{c\ al\ final}}$ no se sabe.
c) $\Delta E_{\mathrm{m}} = 0$ ya que sólo actúan fuerzas conservativas; $E_{\mathrm{m\ al\ final}}$ no se sabe.

A.15.- Explica las relaciones que existen entre trabajo, variación de energía cinética y variación de energía potencial de una partícula que se desplaza bajo la acción de varias fuerzas. ¿Qué indicaría el hecho de que la energía mecánica de la partícula no se conserve?