1 EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

IDEAS PRINCIPALES

- Oscilaciones
- Movimiento periódico
- Movimiento armónico simple
- Péndulo simple
- Oscilaciones amortiguadas
- Oscilaciones forzadas
- Resonancia
- Análisis de Fourier

Las oscilaciones o vibraciones se presentan en la Naturaleza con mucha frecuencia. Ejemplos de oscilaciones son el movimiento de una cuerda de guitarra tras pulsarla, o de cualquier otro instrumento de cuerda, o el del muelle estirado una vez que se deja libre uno de sus extremos, así como cualquier otro material elástico. Mediante las oscilaciones de un péndulo se pudo empezar a medir los intervalos de tiempo de una manera fiable y reproducible.

En la actualidad, también hablamos de oscilaciones al referirnos a la producción de ondas electromagnéticas de radio, televisión o la telefonía móvil; o dentro de la teoría atómico-molecular al señalar el movimiento vibratorio de átomos y moléculas en un cristal.

1 OSCILACIONES

En la Física es importante el estudio de las oscilaciones porque constituyen el inicio de fenómenos diversos y relevantes como el sonido, los terremotos, la luz y otras radiaciones. En la industria se necesita un conocimiento en este campo para el desarrollo de automóviles (amortiguadores, evitar vibraciones molestas), para la fabricación de equipos de música o audiovisuales, en la construcción de edificios y un largo etcétera.

En todos estos casos existe un **movimiento oscilatorio**, es decir, un cuerpo que realiza un movimiento de vaivén con una amplitud determinada en torno a una **posición de equilibrio** que es aquella que ocupa el cuerpo cuando no se le obliga a oscilar.

En esta unidad intentaremos desarrollar un modelo matemático, el **oscilador armónico**, que nos permita estudiar todos los fenómenos anteriores y otros análogos y que se ha aplicado con éxito al estudio de la estructura de los átomos y moléculas, al de la producción de radiaciones electromagnéticas o al del comportamiento de la corriente alterna.

El movimiento de la Luna alrededor de la Tierra es periódico (28 días) pero no es oscilatorio.

1.1 Movimientos periódicos

Se conoce con el nombre de movimiento periódico el de un cuerpo en el que todas las magnitudes que sirven para su descripción (posición, velocidad y aceleración) toman el mismo valor cada intervalo regular de tiempo, llamado **periodo** (T).

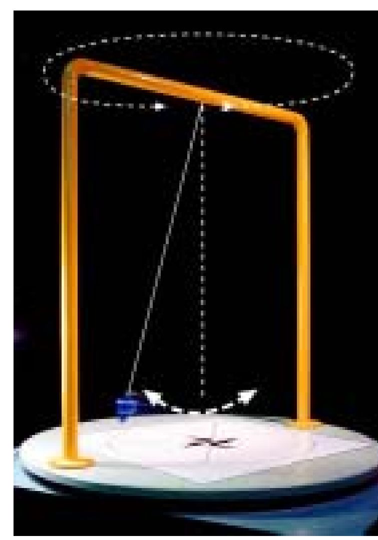
Generalmente los movimientos oscilatorios son periódicos denominándose periodo de la oscilación al tiempo que tarda en producirse una oscilación completa.

Otra magnitud utilizada para describir el movimiento periódico es la **frecuencia** (f) que es número de oscilaciones que se producen en la unidad de tiempo. Entre el periodo y la frecuencia existe la siguiente relación:

$$f = \frac{1}{T}$$

Por ejemplo, si la frecuencia es 4 oscilaciones en cada segundo, cada oscilación tardará un cuarto de segundo (0,25 s) en producirse.

La unidad de frecuencia en el SI es el **hertzio** (Hz)* que representa una oscilación o ciclo en cada segundo. Puede representarse como s^{-1}.



El movimiento de un péndulo es periódico y también es oscilatorio.

2 EL MOVIMIENTO OSCILATORIO ARMÓNICO SIMPLE

El **movimiento armónico simple** (por brevedad lo llamaremos simplemente **MAS**) es el más importante de los movimientos oscilatorios periódicos ya que es el más sencillo de analizar y constituye una descripción bastante precisa de muchas oscilaciones que se presentan en la naturaleza. Además cualquier movimiento oscilatorio periodico se puede considerar como la superposición (suma) de varios MAS.

* El hertzio recibe ese nombre en honor a Heinrich Hertz (1857-1894) cuyas investigaciones proporcionaron la confirmación experimental de las ondas electromagnéticas predichas teóricamente por James Clark Maxwell (1831-1879).

La aceleración de un MAS es producida por una **fuerza recuperadora**, es decir, una fuerza que es proporcional al desplazamiento del móvil y va dirigida hacia el punto de equilibrio. Si es así, al sistema que oscila se le llama **oscilador armónico**, y es un modelo matemático que pocos osciladores reales cumplirán exactamente excepto en márgenes muy limitados.

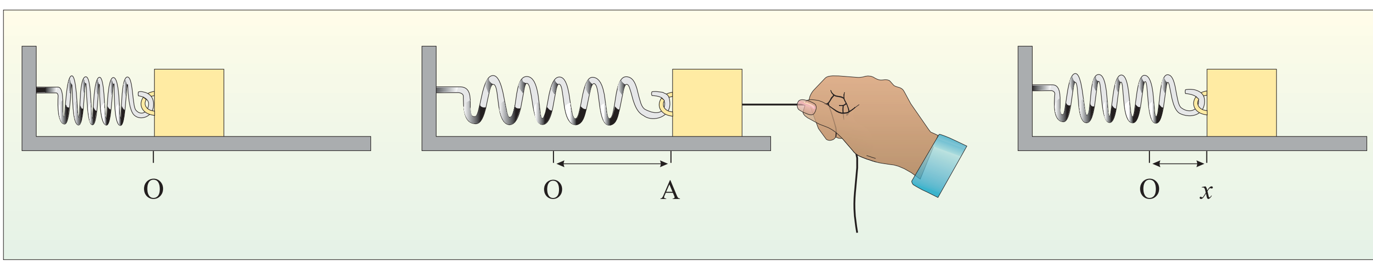
Ejemplos de MAS son el del péndulo cuando las oscilaciones son pequeñas o el movimiento libre de un muelle horizontal tras haberlo comprimido o estirado.

A.1.- Describe las diferencias entre movimiento oscilatorio, periódico y MAS. ¿Puede un movimiento periódico no ser oscilatorio? Propón ejemplos de movimientos oscilatorios periódicos.

2.1 Dinámica del MAS

Supongamos un muelle horizontal y una partícula* asociada a su extremo libre que puede moverse sobre una superficie perfectamente pulida para que no existan rozamientos que amortigüen las oscilaciones. Si separamos la partícula de la posición de equilibrio y la soltamos comenzará el MAS comprimiéndose y extendiéndose el muelle sucesivamente.

* Como partícula podemos considerar cualquier cuerpo rígido. En el dibujo hemos representado un bloque cúbico



Posición de equilibrio | **Estiramos el muelle mediante una fuerza exterior** | **Al soltar comienza el MAS**

A la posición de máxima separación la llamamos **amplitud** (A) del movimiento. La posición o distancia al punto de equilibrio en cada instante se denomina **elongación** (x), siendo el valor nulo cuando el cuerpo pasa por la posición de equilibrio.

En cualquier posición que no sea la de equilibrio, sobre la partícula actúa la fuerza que hace el muelle sobre ella. Decimos que es una fuerza recuperadora pues en cada posición esa fuerza hace tender al cuerpo hacia la posición de equilibrio. Esta fuerza recuperadora viene definida por la ley de Hooke:

$$F = -k\,x$$

F es la fuerza que ejerce el muelle sobre el cuerpo, x es la distancia del cuerpo a la posición de equilibrio (igual al alargamiento o acortamiento del muelle) y k es una constante que depende de la naturaleza del muelle y se denomina **constante de recuperación** o **constante elástica**.

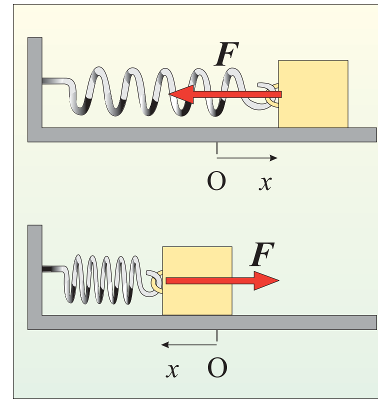
El valor de la constante elástica nos indica si el muelle es «duro» o «blando», nos informa de su rigidez: un valor alto significa que se necesita una gran fuerza para deformar el muelle una unidad de longitud; sería un muelle duro. Un valor bajo indicaría que se necesita una fuerza pequeña para deformar al muelle, lo que podría interpretarse como un muelle blando.

El signo negativo responde al hecho de que el sentido de la fuerza recuperadora es siempre opuesto al del desplazamiento. Supogamos en la figura de la derecha, que tomamos como sentido positivo hacia la derecha (tomamos $x = 0$ en la posición de equilibrio). Cuando esté estirado el muelle x tomará valores positivos, pero el sentido de la fuerza recuperadora es hacia la izquierda, y por tanto será negativa. Cuando esté comprimido x será negativa, pero la fuerza se dirigirá hacia la derecha, y será positiva.

La aceleración en un movimiento armónico simple la podremos calcular si aplicamos la segunda ley de Newton, teniendo en cuenta el valor de la suma de las fuerzas que actúen sobre la partícula y la masa m de ésta. En el caso de una partícula unida al extremo de un muelle se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F = -kx \\ \Sigma F = ma\end{array}\right\} \qquad a = -\frac{k}{m}x$$

> Siempre que la aceleración de un objeto sea proporcional a su desplazamiento pero con sentido opuesto, el objeto se mueve con un MAS.



La fuerza recuperadora y la elongación siempre tienen sentidos opuestos.

A.2.- Tenemos un muelle cuya longitud es 20 cm. Para alargarlo hasta que alcance una longitud de 26 cm se ejerce sobre él una fuerza de 120 N. Unimos un extremo del muelle a un soporte inmóvil y su extremo libre lo unimos a un cuerpo de 2 kg que se puede mover sobre una superficie horizontal sin rozamiento.

a) ¿Cuál será la posición de equilibrio de ese sistema?

b) Si separamos 10 cm al cuerpo y lo soltamos, ¿qué tipo de movimiento realizará?, ¿será un movimiento uniformemente acelerado? ¿Por qué?

c) ¿Cuál será la aceleración cuando el cuerpo se encuentre a 4 cm de la posición de equilibrio en el lado considerado positivo? ¿Hacia dónde estará dirigida?

d) Calcula la aceleración cuando el cuerpo se encuentre a 6 cm de uno de los extremos de su trayectoria en el lado considerado negativo. ¿Hacia dónde estará dirigida?

e) ¿Hacia dónde estará dirigida la aceleración en el instante en el que el cuerpo pasa por la posición de equilibrio?

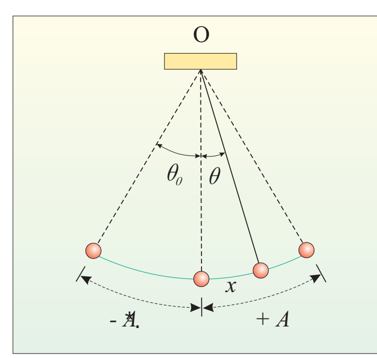
c) a = –40 m/s^2; d) a = 40 m/s^2

2.2 Cinemática del MAS

El MAS es un movimiento de vaivén con una amplitud determinada respecto a la posición de equilibrio. Es un movimiento acelerado cuya velocidad y posición cambian continuamente aunque sus valores se repiten a intervalos de tiempo regulares.

Como ejemplo de MAS podemos considerar el de la lenteja de un péndulo que oscila libremente después de ser separada un ángulo pequeño de su posición de equilibrio. Más adelante comprobaremos que el movimiento de un péndulo sólo es un MAS cuando el ángulo θ_0 respecto a la posición de equilibrio es pequeño.

Aunque este movimiento se amortigua debido al rozamiento con el aire y en el punto de oscilación, supondremos idealmente que esto no ocurre y el movimiento se mantiene constante.

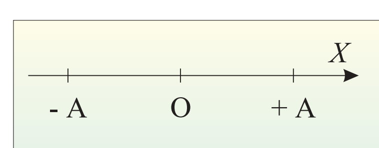


A.3.- a) ¿Cómo varía la posición de la lenteja a lo largo del tiempo? Haz una representación gráfica de la posición x respecto del tiempo t.

b) ¿Cómo varía la rapidez frente al tiempo? Haz una representación gráfica de la rapidez v frente al tiempo t.

c) Escribe una ecuación x = f(t) que pueda representar al movimiento del péndulo.

d) Escribe una ecuación v = f(t) para este movimiento.



Llamamos movimiento armónico simple al de aquel cuerpo cuya posición en cada instante puede ser descrita con una ecuación del tipo:

$$x = A \text{ sen } \phi = A \text{ sen } (\omega t + \phi_0)$$

A ϕ se le llama **fase** del MAS. Cada periodo T el movimiento se repite por lo que podemos expresar la fase mediante el cociente t/T que nos indica el número de periodos transcurridos desde que se comenzó a medir el tiempo. También lo podemos escribir como $f\,t$ o mejor como $2\pi f\,t$ donde la frecuencia la expresamos en radianes en cada unidad de tiempo en lugar de oscilaciones con objeto de poder calcular las funciones seno o coseno.

A la frecuencia $2\pi f$ se la representa con el símbolo ω y se la denomina **frecuencia angular o pulsación**. Su unidad es el radián en cada segundo cuyo símbolo es s^{-1}.

$$\omega = 2\pi f$$

La **fase inicial** o **constante de fase** ϕ_0 está relacionada con la elongación correspondiente para $t = 0$ (el instante en el que empezamos a medir).

Definiciones

Elongación x: distancia del cuerpo que oscila al punto de equilibrio.

Amplitud A: valor absoluto de la elongación máxima.

Frecuencia f: número de oscilaciones que se producen en la unidad de tiempo.

Periodo T: tiempo que dura una oscilación.

Frecuencia angular ω: frecuencia expresada en radianes en la unidad de tiempo.

Fase ϕ: valor angular que define la posición en cada instante.

Constante de fase o fase inicial ϕ_0: valor de la fase en el instante en el que comienza la medida.

EJEMPLO

El movimiento del pistón de un motor es aproximadamente un MAS. Supongamos que tiene una amplitud de 12 cm y realiza 3000 rpm. Si empezamos a contar el tiempo cuando pasa por la posición de equilibrio:

a) Escribe la ecuación que representa la elongación en cada instante.

b) Calcula la posición del pistón cuando t = 2,18 s.

a) Los datos conocidos de este movimiento son: la amplitud A = 0,12 m y la frecuencia, aunque ésta debemos expresarla en número de oscilaciones en cada segundo, f = 3000/60 = 50 Hz.

La frecuencia angular se calcula conocida la frecuencia: $\omega = 2\pi f = 100\pi \text{ s}^{-1} = 314 \text{ s}^{-1}$.

Sustituidos estos datos obtenemos la ecuación del MAS: $x = 0{,}12 \text{ sen } (100\pi t + \phi_0)$

La fase inicial ϕ_0 puede calcularse si sabemos la elongación para un instante determinado. En este caso, sabemos que $x = 0$ cuando $t = 0$. Por lo tanto, $0 = 0{,}12 \text{ sen } \phi_0$, luego $\phi_0 = 0$.

La ecuación de la posición en función del tiempo es para este movimiento: $x = 0{,}12 \text{ sen } (100\pi t)$

b) Sustituyendo para el caso concreto que se ha planteado:

$$x = 0{,}12 \text{ sen } (218\pi) = 0$$

A.4.- Supongamos que escribimos la ecuación del MAS utilizando la función seno. Calcula la fase inicial en las siguientes situaciones:

a) Empezamos a medir el tiempo cuando el móvil pasa por el extremo de la oscilación en el que la posición se considera negativa.

b) Empezamos a medir el tiempo cuando pasa por el punto de equilibrio.

c) Empezamos a medir el tiempo cuando el móvil pasa por un punto situado a una distancia $A/3$ del punto de equilibrio.

d) Repite los apartados anteriores pero ahora suponiendo que hemos escrito la ecuación del MAS utilizando la función coseno.

(a) $\phi_0 = 3\pi/2$; b) $\phi_0 = 0$; c) $\phi_0 = 0{,}1\pi$; d) $\phi_0 = \pi$; $\phi_0 = \pi/2$; $\phi_0 = 1{,}23$) radianes

A.5.- Un cuerpo realiza un MAS, existiendo entre las posiciones extremas del mismo una distancia de 10 cm y realizando 20 oscilaciones en 4 s. Al comenzar a contar el tiempo el cuerpo pasaba por la posición de equilibrio. Escribe la ecuación de la posición en función del tiempo para este MAS y calcula la posición 20,32 s después de empezar a contar el tiempo.

$x = 0{,}05 \text{ sen } (10\pi t)$; $x = -0{,}029$ m

En los ejercicios relativos al MAS y al movimiento ondulatorio el argumento de la función seno o de la función coseno está expresado en radianes. Al calcular el seno o el coseno hay que tenerlo en cuenta para utilizar la calculadora correctamente.

Cualquier argumento, por grande que sea, se puede escribir como un múltiplo entero de 360º más un valor menor de 360º. El seno o el coseno del ángulo es igual al seno o al coseno de ese resto. Es decir:

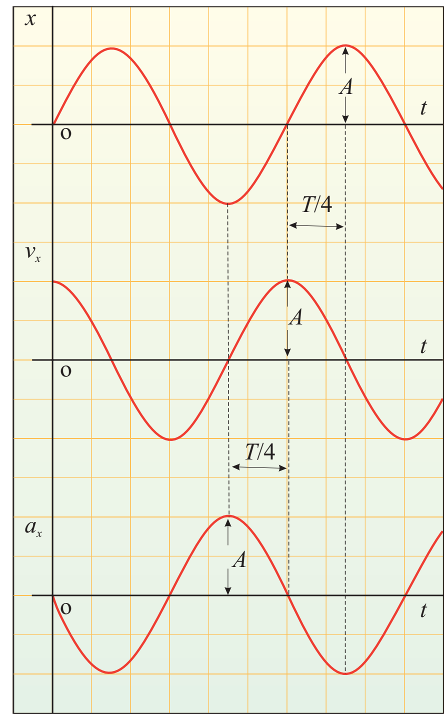
Si un ángulo cumple que: $\beta = 360\, n + \alpha$ entonces

$\text{sen } \beta = \text{sen } \alpha$

A.6.- Un cuerpo realiza un MAS de forma que la distancia entre la posición de equilibrio y el punto de máxima separación es de 20 cm. Tarda 2 s en dar una oscilación completa y, cuando se comenzó a contar el tiempo, el cuerpo estaba en la posición de máxima separación. Escribe la ecuación de la posición en función del tiempo para ese MAS y calcula la posición 4,2 s después de empezar a contar el tiempo.

$x = 0{,}2$ sen $(\pi t + \pi/2)$; $x = 0{,}162$ m

Velocidad y aceleración en el MAS



A partir de la ecuación de la posición en función del tiempo para un movimiento armónico simple, podemos calcular la rapidez en cualquier instante. Si escogemos la función seno para la ecuación de la elongación, la rapidez quedará descrita con la función coseno.

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\left(\omega t + \phi_0\right)$$

La velocidad máxima es $A\omega$.

Cuando la función seno es máxima la función coseno es mínima. Puede decirse que entre la función seno y la función coseno existe un desfase de $\pi/2$ rad. Si se representan ambas funciones como en las gráficas adjuntas, puede verse que v tiene los valores máximos y mínimos un cuarto de período antes que x. Como un cuarto de período corresponde a un cambio de fase de $\pi/2$ rad (90 º), a veces decimos que v adelanta a x en 90 º.

De forma análoga podemos calcular la aceleración instantánea.

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi_0\right) = -\omega^2 x$$

La aceleración tiene un desfase con la elongación de π rad de manera que sus fases son iguales en valor absoluto pero con signo opuesto.

El valor máximo de la aceleración es $A\omega^2$.

EJEMPLO

La ecuación de la posición en un MAS es $y = 0{,}12$ sen$100\,\pi\, t$.

a) Escribe las ecuaciones de la velocidad y aceleración en función del tiempo.

b) Calcula la velocidad y la aceleración 2,183 segundos después de empezar a contar el tiempo.

Hemos utilizado la letra y para representar la elongación; los símbolos que se emplean son siempre resultado de convenios, o de costumbres, no siendo decisivo el símbolo utilizado.

a) La ecuación de la rapidez en función del tiempo se obtiene derivando con respecto al tiempo la ecuación que da la posición instantánea:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0{,}12 \cdot 314 \cos 100\,\pi\, t = 37{,}68 \cos 100\,\pi\, t$$

La ecuación de la aceleración, se obtiene derivando la rapidez respecto del tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\,0{,}12 \cdot 314^2 \ \operatorname{sen} 100\,\pi\, t = -\,11831{,}5 \operatorname{sen} 100\,\pi\, t$$

b) Sustituyendo para el caso concreto que se ha planteado

$$v = 0{,}12 \cdot 100\,\pi \cos (218{,}3\,\pi) = 22{,}16 \text{ m/s}$$

$$a = -\,0{,}12\,(100\,\pi)^2 \operatorname{sen} (218{,}3\,\pi) = -\,9582 \text{ m/s}^2$$

A.7.- La ecuación de un MAS es $x = 0{,}1 \text{ sen} 2t$ (x en m y t en s). Calcula la amplitud, el período, la frecuencia y la frecuencia angular del movimiento, así como las ecuaciones de la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

$A = 10$ cm; $T = 3{,}14$ s; $f = 0{,}32$ Hz; $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$; $v = 0{,}2 \cos 2t$ m/s; $a = -0{,}4 \text{ sen} 2t$ m/s^2

A.8.- Una partícula vibra con un MAS de amplitud 4 cm y frecuencia 20 Hz. Calcula la posición y velocidad en el instante $t = 5$ s, sabiendo que en $t = 0$ la partícula está en el punto de equilibrio.

$x = 0$ m; $v = 5$ m/s

A.9.- La ecuación de un MAS es $x = 0{,}3 \cos(10t + \pi/3)$. ¿Es posible esa ecuación? Indica el período y la fase inicial del MAS. Escribe la ecuación de la posición en función del tiempo utilizando la función seno.

$T = 0{,}628$ s; $\phi_0 = 150$ º; $x = 0{,}3 \text{ sen } (10t + 5\pi/6)$

2.3 Relación de las magnitudes cinemáticas con las características del sistema que oscila

La aceleración de cualquier partícula que oscila con un MAS está siempre relacionada con la elongación por la ecuación:

$$a = -\omega^2 x$$

En el caso de que el sistema oscilante sea un cuerpo unido a un muelle horizontal, la fuerza recuperadora que origina la aceleración viene dada por la ley de Hooke, de forma que podemos escribir:

$$\sum F = m a = -k x; \quad a = -\frac{k}{m} x$$

Comparando con la ecuación obtenida para la aceleración en el MAS se obtiene la frecuencia angular en función de las características del muelle:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Para muelles rígidos (k alta) o cuerpos de masa pequeña, las oscilaciones son rápidas. Lo contrario ocurre con cuerpos de masa grande o muelles blandos (k pequeña). Todo esto está de acuerdo con la experiencia que tenemos de sistemas oscilantes compuestos por muelles.

A.10.- Un cuerpo de 4 kg está unido al extremo de un muelle cuya constante elástica es de 10 000 N/m. Calcula la frecuencia del MAS que se produce al separar el cuerpo 10 cm de su posición de equilibrio. ¿Cambiaría la frecuencia si se separa el cuerpo 5 cm de la posición de equilibrio en lugar de 10 cm? ¿Cómo se podría cambiar la frecuencia utilizando el mismo muelle?

$f = 8$ Hz

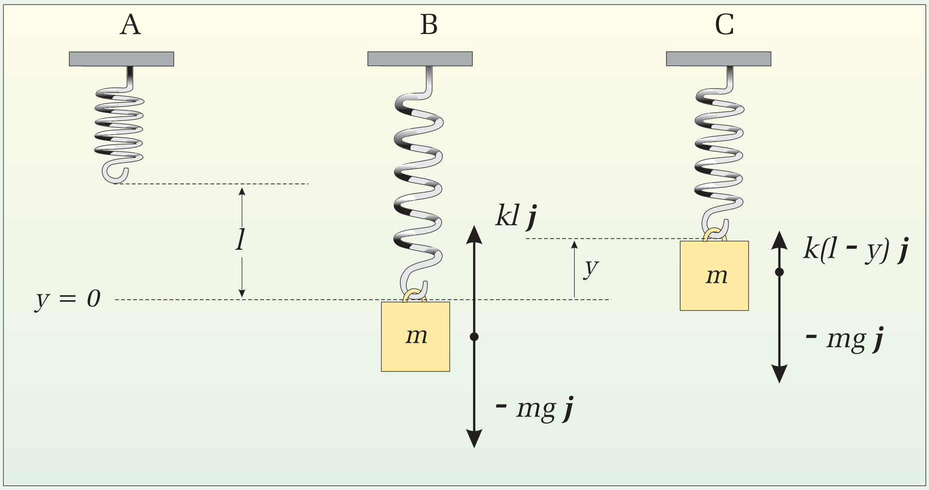
El periodo (o la frecuencia) del MAS de un cuerpo unido a un muelle no depende de la amplitud del movimiento, sólo de la constante elástica del muelle y de la masa del cuerpo. Eso es característico de todos los MAS: el tiempo que se tarda en efectuar una oscilación no depende de la amplitud de la misma.

EJEMPLO

Supongamos que tenemos un muelle colgado en posición vertical cuya constante es 10 N/m. Del muelle pende un cuerpo de 200 g. Si tiramos del cuerpo hacia abajo alargando el muelle 4 cm y luego lo soltamos, se produce un movimiento oscilatorio (comenzamos a contar el tiempo en este momento).

a) Demuestra que el movimiento es un MAS.

b) Establece la ecuación de su movimiento $y = f(t)$.



a) La figura A representa el muelle antes de colgarle el cuerpo y la figura B lo representa cuando sostiene al cuerpo en equilibrio. Al estar en equilibrio, la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, la atracción de la Tierra mg y la fuerza recuperadora del muelle kl, debe ser cero. Podemos escribir, tomando sentido positivo hacia arriba:

$$\Sigma F = k\,l - m\,g = 0$$

La figura C representa la situación del cuerpo y el muelle en un instante en el que está oscilando. La suma de las fuerzas valdrá:

$$\Sigma F = k\,(\,l - y) - m\,g = -\,k\,y$$

Hemos tomado como origen de la coordenada y la posición de equilibrio que señalaba la figura B. Puede verse que obtenemos la ecuación de una fuerza recuperadora, proporcional a la distancia y al punto de equilibrio que corresponde a la situación de equilibrio que representa la figura B. En estas condiciones podemos asegurar que el movimiento oscilatorio es un MAS.

b) La máxima distancia que recorre el muelle es 4 cm lo que se corresponde con la amplitud A del movimiento. Si utilizamos la función seno para la ecuación del movimiento, la fase inicial será $\pi/2$ pues comenzamos a medir el tiempo en la posición de máxima elongación, es decir, en un extremo. Por último, la frecuencia angular la podemos calcular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0{,}2}} = \sqrt{50}\ \mathrm{s}^{-1}$$

La ecuación del movimiento será: $y = 4\ \mathrm{sen}(\sqrt{50}\ t + \pi/2)$ cm.

Hemos utilizado la letra y en lugar de x para la elongación porque hemos elegido la dirección vertical para el movimiento.

A.11.- Un cuerpo de 100 g se cuelga de un muelle y le produce un alargamiento de 5 cm. A continuación se separa el cuerpo 10 cm de la posición de equilibrio y se suelta comenzando a contar el tiempo en ese momento. Calcula la posición del cuerpo 3,2 s después de haberlo soltado ($g = 10\ \mathrm{m/s^2}$).

$y = 2{,}9$ cm

2.4 Energía en el movimiento armónico simple

Desde un punto de vista energético, un sistema oscilante es un sistema que transforma continuamente energía cinética en energía potencial elástica y viceversa. Para estirar o comprimir el muelle hay que realizar un trabajo, por ello decimos que el muelle en esa situación adquiere energía potencial elástica. Después el muelle espontáneamente adquiere energía cinética a costa de la consiguiente pérdida de energía potencial elástica. Sucede al revés cuando se va frenando.

Si suponemos **al sistema aislado**, es decir que ni le damos energía ni el sistema pierde energía por rozamiento o por cualquier otra causa, la cantidad total de energía que tendrá el sistema será constante. Eso es lo mismo que decir que la suma de la energía cinética y de la energía potencial elástica será constante.

$$E_{\text{total}} = E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial elástica}} = \text{constante}$$

Lo que es constante es la suma de las dos energías, no cada una de ellas por separado. Efectivamente, la energía cinética varía desde un valor máximo cuando pasa por la posición de equilibrio (donde la velocidad es máxima) a un valor nulo cuando se encuentra en las posiciones de máxima separación de la posición de equilibrio (puntos en los que la velocidad es nula); por el contrario, la energía potencial elástica es máxima cuando el cuerpo está en la posición más separada y nula cuando pasa por la posición de equilibrio.

La energía total del sistema oscilante, es decir, la suma de la energía cinética y potencial elástica, es un valor constante que coincide con el valor máximo de la energía cinética y con el valor máximo de la energía potencial elástica (que son iguales).

De modo que la energía del sistema oscilante la podemos obtener de tres formas en un instante determinado (siendo su posición x y su velocidad v):

$$E_{\text{total}} = E_{\text{pot máx}} = ½\, k\, A^2$$

$$E_{\text{total}} = E_{\text{cin máx}} = ½\, m\, v^2_{\text{max}} = ½\, m\, \omega^2 A^2 = 2\, \pi^2\, m\, f^{\,2} A^2$$

$$E_{\text{total}} = ½\, k\, x^2 + ½\, m\, v^2$$

Las ecuaciones anteriores son válidas no sólo para el caso de un muelle sino que también pueden aplicarse a un péndulo (en este caso la energía potencial es gravitatoria) y, en general, a cualquier movimiento armónico simple.

A.12.- Dibuja una gráfica energía-elongación. Hazlo para la energía total, la cinética y la potencial elástica, todo ello en la misma gráfica.

EJEMPLO

Un muelle oscila con una frecuencia de 8 Hz y una amplitud de 12 cm cuando de él hay colgado un cuerpo de 2 kg. Sabemos que cuando se comenzó a contar el tiempo se encontraba a 6 cm de la posición de equilibrio, en el sentido que hemos considerado positivo. Calcula:

a) La frecuencia angular.

b) La constante elástica del muelle.

c) La ecuación del movimiento armónico simple.

d) La energía total, cinética y potencial elástica del sistema cuando el cuerpo está a 7 cm de la posición de equilibrio.

a) La frecuencia angular está relacionada con la frecuencia $\omega = 2\pi f = 16\pi = 50{,}27\ s^{-1}$

b) A partir de la relación entre la frecuencia angular y la constante elástica del muelle, $\omega^2 = k/m$, podemos calcular esta última: $k = 2527 \cdot 2 = 5054$ N/m

c) La fase inicial ϕ_0 puede calcularse utilizando el valor de la elongación para un instante dado. Ya que $x = 0{,}06$ cuando $t = 0$; $0{,}06 = 0{,}12$ sen ϕ_0 y $\phi_0 = 30° = \pi/6$ radianes

La ecuación de la posición en función del tiempo es:

$$x = 0{,}12 \text{ sen } (16\pi\, t + \pi/6)$$

d) La energía total no depende de la posición. En cada instante tendrá un valor diferente de energía cinética y de energía potencial, pero la suma de ambas debe ser constante, ya que suponemos que el sistema está aislado y ni se le da ni se le quita energía.

$$E = 2\pi^2\, m\, f^2 A^2 = 2 \cdot 9{,}86 \cdot 2 \cdot 64 \cdot 0{,}12^2 = 36{,}4 \text{ J}$$

Para calcular la energía cinética necesitamos conocer la velocidad en ese instante. Para ello, se calcula en primer lugar la fase en ese instante, lo que podemos hacer a partir de conocer la posición que es $x = 7$ cm.

$$0{,}07 = 0{,}12 \text{ sen}(16\pi\, t + \pi/6); \quad \text{sen}(16\pi\, t + \pi/6) = 0{,}07/0{,}12 = 0{,}583$$

$$\phi = (16\pi\, t + \pi/6) = \text{arcsen } 0{,}583 = 35{,}7°$$

La velocidad es: $v = A\, \omega \cos \phi = 0{,}12 \cdot 50{,}27 \cos 35{,}7 = 4{,}90$ m/s

La energía cinética es: $E_c = ½ \cdot 2 \cdot 4{,}9^2 = 24$ J

La energía potencial elástica = energía total – energía cinética = 12,4 J

Hubiese sido más fácil calcular primero la energía potencial elástica a partir de la expresión $E_p = ½\, k\, x^2$ y, teniendo en cuenta que la energía total es la suma de la cinética y de la potencial elástica calcular la energía cinética. Lleva a cabo los cálculos y comprueba que se obtienen los mismos valores para la energía potencial, la energía cinética y la velocidad.

A.13.- Si se duplica la frecuencia de un MAS ¿qué le pasa a la energía? ¿Y si se duplica la amplitud? ¿Si se duplica la masa del cuerpo colocada en el extremo del muelle sin que cambie la amplitud, qué le ocurrirá a la energía?

A.14.- Un cuerpo de 0,5 kg describe un MAS de 10 cm de amplitud realizando dos oscilaciones cada segundo. Calcula:

a) La elongación 1/12 segundos después de pasar por el punto de máxima separación respecto a la posición de equilibrio.

b) La energía total del cuerpo cuando pasa por la posición de equilibrio.

c) ¿Cuál será la energía total cuando pasa por un punto colocado a 5 cm de la posición de equilibrio?

$x = 5$ cm; $E = 0{,}395$ J

A.15.- Un muelle se estira 0,200 m cuando se le cuelga un cuerpo de 400 g. Se estira luego el muelle una longitud adicional de 0,105 m respecto a su punto de equilibrio y se le suelta. Determina:

a) La constante del muelle.

b) La velocidad máxima.

c) La velocidad cuando el cuerpo se halle a 0,05 m del equilibrio.

d) La aceleración máxima.

$k = 19{,}6$ N/m; $v_{máx} = 0{,}735$ m/s; $v = 0{,}646$ m/s; $a = -5{,}145$ m/s^2

3 EL PÉNDULO SIMPLE: un ejemplo de MAS

Por **péndulo simple** entendemos una partícula de masa m suspendida de un punto O por una cuerda de longitud L, que se puede considerar inextensible y de masa despreciable. A la partícula que oscila se le llama lenteja del péndulo.

Si desplazamos la partícula un determinado ángulo θ_0 respecto a la posición de equilibrio, soltándola a continuación, la partícula se moverá en un arco de circuferencia de radio L. Tomemos como punto de referencia el punto en el que se encuentra la partícula cuando está en equilibrio. La amplitud A será igual a la mitad de la longitud del arco que describe en su movimiento (igual a la distancia, medida sobre el arco, desde el punto de equilibrio a la posición de máxima separación), y la elongación x en cada momento será la distancia, medida sobre la trayectoria, desde el punto de referencia al punto en el que se encuentra en ese momento la lenteja del péndulo (figura 1).

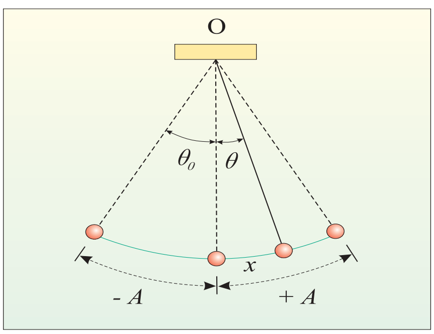


Figura 1

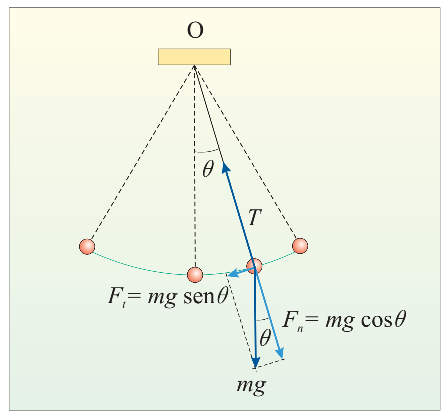


Figura 2

Sobre la lenteja actúan dos fuerzas en cualquier punto de la trayectoria: la atracción de la Tierra sobre la lenteja cuyo valor es mg y la fuerza que ejerce la cuerda sobre la lenteja del péndulo que llamaremos T (figura 2).

A.16.- La tensión T y la fuerza F_n tienen la misma dirección pero sentido opuesto. ¿Cuál es mayor? ¿Tienen el mismo valor en algún punto de la trayectoria?
¿Cuál es el efecto de F_t? ¿Será una fuerza recuperadora?

La fuerza tangencial F_t produce una aceleración tangencial en la lenteja cuya rapidez cambia continuamente. Si tenemos en cuenta la relación que existe entre el ángulo expresado en radianes, el arco y el radio ($x = L\theta$), y que para ángulos pequeños el seno del ángulo es aproximadamente igual al valor del ángulo expresado en radianes, ver tabla 1, podemos escribir:

$$F_t = -mg\,\text{sen}\,\theta \approx -mg\theta = -mg\frac{x}{L} = -\frac{mg}{L}x = -kx$$

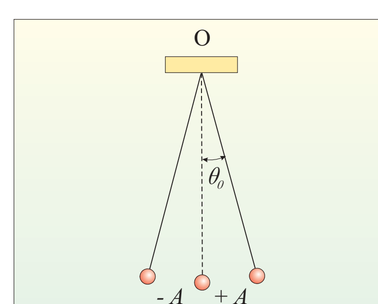
donde k es una constante, cociente entre el peso de la lenteja y la longitud del péndulo. El signo menos se ha puesto para indicar que el sentido de la fuerza es contrario al desplazamiento, tanto angular como lineal.

La fuerza que produce la variación de la rapidez es proporcional a la distancia a la posición de equilibrio y de sentido contrario al desplazamiento, por lo que es de suponer que el movimiento del péndulo sea también un movimiento armónico simple, similar al de un cuerpo que se encuentra sujeto al extremo de un muelle. Por lo tanto, se

Tabla 1

θ grados	θ rad	sen θ
1	0,0175	0,0175
5	0,0873	0,0872
10	0,1745	0,1736
15	0,2618	0,2588
20	0,3491	0,3420
30	0,5235	0,5000
60	1,0472	0,8660

Para θ < de 15º la diferencia entre sen θ y θ es menor del 1%



Péndulo que oscila con amplitud angular máxima de 15 º

puede describir el movimiento del péndulo con la ecuación general del MAS que permite calcular la posición en función del tiempo:

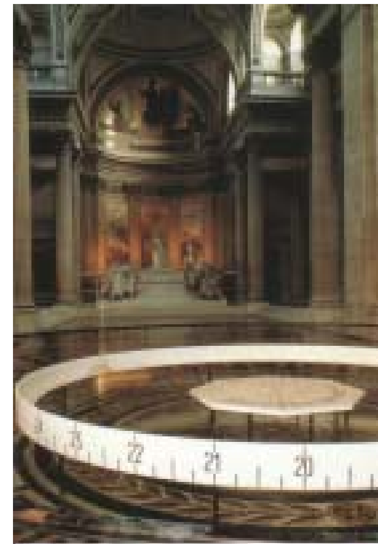
$$x = A \text{ sen } (\omega t + \phi_0)$$

Si el ángulo no es pequeño la aproximación no puede hacerse. Tendríamos un movimiento oscilatorio periódico pero no sería un MAS. En este caso el periodo depende de la amplitud.

El periodo de un péndulo puede calcularse con la expresión: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

A.17.- a) Demuestra que la ecuación anterior se obtiene aplicando la segunda ley de Newton y teniendo en cuenta que en un MAS la aceleración es: $a = -\omega^2 x$.

b) Propón un diseño experimental para comprobar la relación anterior.



PÉNDULO DE FOUCAULT

León Foucault (1819-1868) fue un físico francés que en 1851 demostró el movimiento de rotación de la Tierra suspendiendo un péndulo con un cable de 67 m desde la cúpula del Panteón de Paris. Como el péndulo oscila siempre en el mismo plano y su extremo gira libremente, el plano de oscilación es independiente del movimiento de rotación de la Tierra. Al rotar el planeta lo que observamos nosotros que somos solidarios a la Tierra, es un giro del plano de oscilación del péndulo que se repite cada 24 horas.

La independencia del periodo respecto de la amplitud, si ésta es pequeña, parece que llevó a Galileo al invento del reloj de péndulo, el primero en tener una buena precisión y que fue reloj patrón durante varios siglos. Para evitar que el péndulo se pare por los rozamientos que sufre, se utiliza un sistema de resortes que mantiene la oscilación.

Otra utilidad del péndulo ha sido la medida de la gravedad en cualquier punto de la superficie terrestre.

A.18.- Determina la gravedad del lugar donde vives.

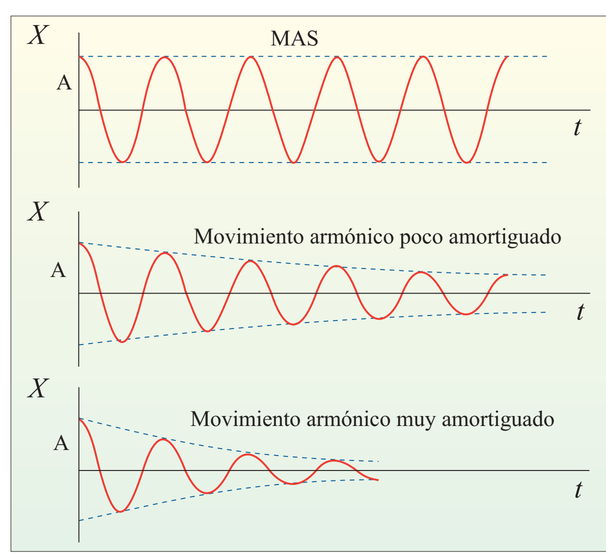
A.19.- Un péndulo tiene una longitud de 80,0 cm y la masa de la lenteja capaz de oscilar es de 50 gramos. Se separa 10 º de la posición de equilibrio y se deja libre, comenzando a contar el tiempo en ese momento. Calcula la posición, la velocidad y la aceleración de la lenteja a los 2 s de haber comenzado el movimiento. (g = 9,8 m/s^2).

x = 10,5 cm; v = –32,1 cm/s; a = –129 cm/s^2

4 OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Hasta ahora no hemos tenido en cuenta que los rozamientos internos del oscilador y el que tiene con el medio que lo rodea causarán una disminución de la oscilación hasta que finalice el movimiento. Por ello, si no aportamos energía al oscilador para mantener su oscilación, su energía mecánica irá disminuyendo con el tiempo y el movimiento se denomina **armónico amortiguado**.

En la figura adjunta se representa la gráfica *x-t* de un MAS y las que corresponden a movimientos armónicos amortiguados.



Según la importancia del rozamiento frente a las otras fuerzas que intervienen en estos casos, la amortiguación del movimiento será mayor o menor. En ciertas condiciones se acaba muy rápidamente el movimiento armónico y el sistema se queda en equilibrio.

A veces, el amortiguamiento es algo positivo. Por ejemplo, los amortiguadores de los coches y motos interesa que «detengan» rápidamente la oscilación que se produce cuando el vehículo encuentra un bache en la carretera.

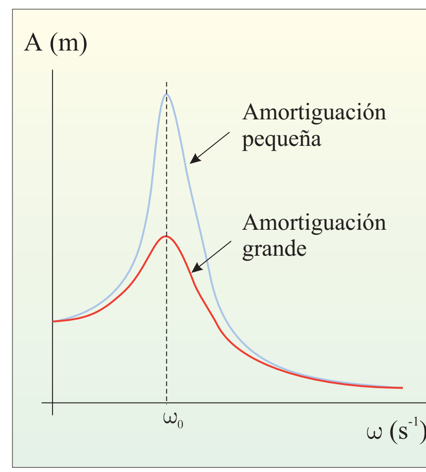
5 OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

Las oscilaciones libres reales son amortiguadas. En ellas la energía mecánica se disipa y la amplitud va disminuyendo. Si queremos mantener la oscilación debemos aportar energía al sistema, al que llamamos **oscilador forzado**.

Un ejemplo ilustrativo puede ser lo que ocurre cuando se quiere pasear a un niño en un columpio. Si queremos que aumente, o al menos que se mantenga, la amplitud de la oscilación, hay que transferir energía a ese sistema lo que se puede hacer mediante empujones aplicados periódicamente.

Si comunicamos más energía que la que se disipa, la energía del sistema aumenta con el tiempo lo que se manifiesta como un aumento de la amplitud. Si aportamos energía al mismo ritmo que se disipa, el movimiento es estacionario y la amplitud no varía. Esta energía la recibe el sistema con una frecuencia ω que es con la que vibrará el sistema cuando se alcance el estado estacionario.

Volviendo al ejemplo del columpio, aquellos que lo hayan intentado habrán observado que para que los empujones sean eficaces es necesario que estén acoplados con el movimiento del columpio. Si lo midiéramos, sería posible observar que el máximo de transferencia de energía ocurre cuando la frecuencia con la que se empuja coincide con la frecuencia del movimiento del columpio.

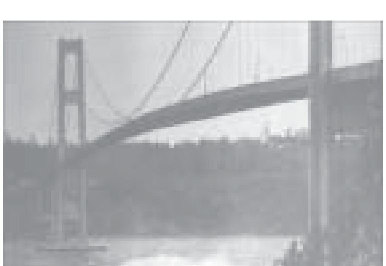


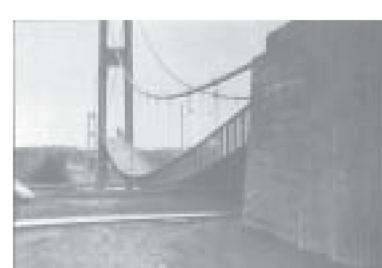
Si representamos la amplitud de las oscilaciones forzadas frente a la frecuencia de la fuerza externa que comunica la energía para dos amortiguamientos distintos obtenemos la figura adjunta. La frecuencia ω_0 es la frecuencia a la que oscila el sistema cuando lo hace libremente. Las curvas de la gráfica anterior se denominan **curvas de resonancia**.

La frecuencia a la cual se transfiere el máximo de energía desde el exterior a un sistema oscilante se llama **frecuencia de resonancia** ω_0. La frecuencia de resonancia coincide con la **frecuencia propia** o **natural** del sistema oscilante, es decir, la frecuencia a la que oscila cuando lo hace libremente.

A.20.- Observación de los fenómenos de resonancia con péndulos acoplados y/o con diapasones de la misma frecuencia.

La resonancia mecánica resulta curiosa, y a veces espectacular. Se cuenta que un puente se derrumbó cuando sobre él transitaba una compañía de soldados franceses que marcaba el paso uniformemente con tan mala suerte que coincidió con la frecuencia propia de oscilación del puente (a eso se atribuye que los militares rompan filas al pasar por los puentes). También es famosa la caída del puente de Tacoma Narrows en julio de 1940. El puente situado en el estado de Washington en USA duró pocas semanas. Un viento lateral de no demasiada intensidad hizo que su estructura central oscilase en estado de resonancia. La oscilación fue paulatinamente aumentando su amplitud hasta que el puente se vino abajo.





También se debe a la resonancia la ruptura de una copa de cristal por el sonido emitido por un cantante. Para que se pueda conseguir esa hazaña es necesario que el sonido emitido tenga la misma frecuencia que la de oscilación del cristal, así como que alcance una intensidad suficiente. Por eso es un gesto sólo reservado a los cantantes de ópera. Cuando se produce la resonancia se aumenta la amplitud de la vibración del vidrio hasta que puede sobrepasarse el límite elástico del mismo y se rompe.

Pero además de los fenómenos mecánicos hay otros ejemplos de resonancias que resultan de gran utilidad. Uno de los más cotidianos es la sintonización de una cadena de radio o televisión. Todas las emisoras producen simultáneamente oscilaciones forzadas sobre el circuito del aparato receptor, pero para cada posición del sintonizador existe una frecuencia natural de oscilación del circuito eléctrico del receptor. Cuando esta frecuencia coincide con la de una emisora la absorción de energía es máxima y por ello es la única que se sintoniza.

También se produce resonancia entre la radiación de un horno microondas y la oscilación de los átomos en las moléculas de los alimentos. Eso es lo que permite esa transferencia de energía tan eficaz. Si no hubiera resonancia, el proceso no tendría casi ninguna influencia: lo que ocurre con los platos de cerámica, que no se calientan en el microondas.

6 MATEMÁTICAS Y REALIDAD

La ciencia hasta Galileo y Newton no usó sistemáticamente las matemáticas para describir la Naturaleza y formalizar sus leyes. Las teorías antiguas tenían mucho de especulativo o descriptivo y sus hipótesis rara vez se cuantificaban o se les exigía la posibilidad de contrastarlas experimentalmente como criterio de validez.

La eficacia de la mecánica newtoniana para describir y predecir sucesos en el campo del movimiento, tanto sobre la superficie terrestre como en el resto del Universo, logró que el uso de las matemáticas como forma de expresión de la física se generalizase a todos sus ámbitos, como habrás comprobado a lo largo de este curso.

Sin embargo, la precisión de una ecuación matemática, tal como la que representa a la 2ª ley de la dinámica $\Sigma \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$, no nos debe llevar a pensar que existe tal precisión en la ley física. Veamos lo que escribe al respecto R. P. Feynman, físico estadounidense experto en Física Cuántica:

> ...Newton dio también una regla acerca de las fuerzas: las fuerzas entre dos cuerpos que interaccionan son iguales y opuestas... esta regla resulta, sin embargo, no ser totalmente cierta. De hecho la ley $F = ma$ no es exactamente cierta. Si fuera una definición deberíamos decir que es exactamente cierta siempre; pero no lo es.
>
> El alumno puede objetar: «No me gusta tal imprecisión, preferiría tenerlo todo exactamente definido; de hecho se dice en algunos libros que la ciencia es algo exacto, en la cual todo está definido. ¡Sin embargo tal cosa no puede conseguirse al insistir en una definición precisa de fuerza! Primero porque la segunda ley de Newton no es exacta; y segundo porque, para entender las leyes físicas debe entenderse que son una forma de aproximación.

A.21.- Analiza el texto de Feynman y explica qué crees que nos quiere indicar.

¿Cómo justifica Feynman sus aseveraciones? Sigamos leyendo.

Cualquier idea simple es aproximada; por ejemplo, consideremos un objeto... ¿Qué es un objeto? Los filósofos dicen siempre: «Bien, tomemos una silla, por ejemplo». En el momento en que dicen tal cosa, se ve que ya no saben de qué están hablando. ¿Qué es una silla? Bien, una silla es una cierta cosa que hay aquí... ¿Cierta? ¿Cómo cierta? Los átomos se evaporan de ella de vez en cuando, no muchos, pero algunos lo hacen; la suciedad se deposita en ella y se mezcla con la pintura, de manera que, para poder definir una silla con precisión, se debería afirmar qué átomos son silla o qué átomos son aire o qué átomos son suciedad o qué átomos pertenecen a la pintura de la silla, lo cual es imposible. Así la masa de la silla sólo puede definirse de forma aproximada. De la misma forma, definir la masa de un objeto aislado tampoco es posible, porque no existen objetos aislados en el mundo; todo objeto es una mezcla de cantidades de cosas distintas, de manera que todo lo que podemos hacer es tratar los problemas con aproximaciones e idealizaciones.

El truco está en la idealización: con una aproximación excelente, quizá de una parte en 10^{10}, el número de átomos de la silla no varía en un minuto, y si no somos muy precisos, podemos idealizar la silla como una cosa definida; de la misma forma aprenderemos las características de la fuerza, de una forma ideal, si no somos demasiado precisos. Se puede estar descontento de la forma aproximada con que la física trata de obtener una visión de la Naturaleza (se intenta siempre hacer aumentar la exactitud de la aproximación) y puede preferirse una definición matemática, pero las definiciones matemáticas no son válidas para el mundo real. Una definición matemática, será buena para las matemáticas, en las cuales puede seguirse totalmente la lógica, pero el mundo físico es tan complejo como (en el caso de) las olas del océano y un vaso de vino. Cuando tratamos de aislar sus distintos elementos, hablar sobre una masa, el vino y el vaso, ¿cómo sabemos quién es quién cuando se disuelve uno en el otro? Las fuerzas que actúan sobre un objeto aislado acarrean una aproximación, y si tenemos un sistema de descripción del mundo real, tal sistema, al menos en el momento presente, debe llevar implícitas aproximaciones de algún tipo.

Tal sistema no es semejante al caso de las matemáticas, en las que todo puede definirse y en las que, por lo tanto, no sabemos de qué estamos hablando. De hecho, la gloria de las matemáticas radica en el hecho de que no tenemos que decir de qué estamos hablando. La gloria radica en que las leyes, los argumentos y la lógica son independientes de lo que «eso» sea...

...De la misma forma, no podemos decir exactamente que $F = ma$ sea una definición, deducir algo puramente matemático y hacer de la mecánica una teoría matemática, cuando la mecánica es una descripción de la Naturaleza. Estableciendo postulados apropiados siempre es posible realizar un sistema matemático... pero no podremos llegar a obtener las matemáticas del mundo, porque antes o después tendremos que comprobar si los axiomas son válidos para la Naturaleza. En consecuencia, siempre nos vemos implicados con los complejos y «sucios» objetos de la Naturaleza, pero con aproximaciones cada vez más precisas.

A. P. Feynman, A. B. Leighton y M. Sands, 1963, *Lecturas de Física*, Addison-Wesley.

6.1 El MAS: un modelo matemático

¿Existe en la realidad el MAS? Es difícil que un MAS ocurra realmente en la Naturaleza, donde las oscilaciones son generalmente amortiguadas. Se puede pensar en un oscilador armónico que no tenga amortiguamiento, con elasticidad constante, en unas condiciones muy especiales, tanto que sería muy difícil considerarlo como algo «real».

A.22.- a) Si en realidad no existe, ¿por qué se estudia el MAS en Física?

b) ¿Existen ejemplos reales descritos aproximadamente por el modelo matemático de oscilador armónico?

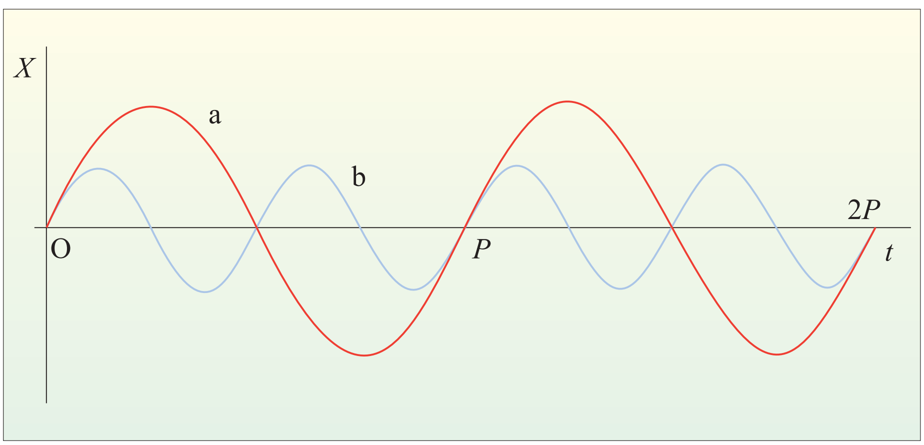
c) Este modelo del MAS ¿es verdadero o falso?

d) ¿Podría obtenerse el concepto de MAS y los cálculos que se realizan con él, sin necesidad de los ejemplos prácticos que se han visto en el tema y otros análogos?

6.2 Superposición de MAS: análisis de Fourier

La mayor parte de las oscilaciones periódicas que se presentan en la Naturaleza no son MAS pero se pueden considerar como suma o **superposición** de varios MAS cuyas frecuencias son múltiplos de una llamada **fundamental**. Para sumar dos o más MAS debemos sumar las elongaciones de cada uno de ellos.

A.23.- Construye la gráfica *x-t* de la superposición de los dos MAS de frecuencias angulares ω y 2ω de la figura siguiente.



Casi cualquier oscilación periódica se puede obtener sumando MAS de frecuencias que son múltiplos de la frecuencia fundamental y cuyas amplitudes se escogen de forma apropiada.

Este método de análisis fue desarrollado por el matemático francés J.B. Fourier (1768-1830) que demostró que con el llamado **teorema de Fourier** cualquier función periódica se puede expresar como una superposición de términos armónicos simples (en lo que se conoce como una **serie de Fourier**).

La frecuencia más pequeña ω es la fundamental, el resto serán 2ω, 3ω, etc. y se les llaman **armónicos** superiores o **sobretonos**.

En definitiva, otra cualidad por la que podemos valorar al modelo del MAS es que cualquier oscilación periódica se puede considerar como la suma o superposición de varios MAS.

Con ello podemos explicar el diferente **timbre** de los instrumentos musicales. Una oscilación de una cuerda de guitarra, por ejemplo, se puede considerar matemáticamente como la superposición de varios armónicos. Otro instrumento de cuerda, produciendo la misma nota, se diferencia en los armónicos o en la amplitud de cada uno de ellos, por lo que, aunque sea la misma nota musical, podemos diferenciar ambos instrumentos.

ACTIVIDADES DE RECAPITULACIÓN

A.1.- Escribe las ecuaciones de la elongación, velocidad y aceleración de un movimiento armónico simple de 10 cm de amplitud, si efectúa 150 vibraciones en cada segundo y se empieza a contar el tiempo cuando la elongación es de 5 cm.

$x = 0{,}1$ sen $(300\pi t + \pi/6)$ m; $v = 30\pi \cos(300\pi t + \pi/6)$ m/s; $a = -88\,826$ sen $(300\pi t + \pi/6)$ m/s^2

A.2.- Una partícula oscila con una frecuencia de 100 Hz y una amplitud de 3 mm. a) Calcula su velocidad y aceleración en el centro del recorrido. b) Calcula la velocidad y aceleración en el extremo del recorrido en el que $x = +A$.

a) $v = \pm 1{,}88$ m/s; $a = 0$ m/s^2; b) $v = 0$ m/s; $a = -1184{,}4$ m/s^2

A.3.- Un movimiento armónico simple tiene de amplitud 8 cm y un período de 4 s. Calcula la velocidad y la aceleración 0,5 s después de que la partícula pase por el extremo de la trayectoria en el que $x = -A$.

$v = 0{,}089$ m/s; $a = 0{,}14$ m/s^2

A.4.- ¿Todo MAS es periódico? ¿Todo movimiento periódico es armónico simple?

A.5.- Un cuerpo de 5 kg está unido al extremo de un muelle. Lo separamos 2 cm de su posición de equilibrio y lo soltamos, comprobando que tarda 0,4 s en recorrer los dos centímetros que separan la posición extrema de la posición de equilibrio. Si separamos al cuerpo 4 cm de la posición de equilibrio, ¿cuánto tardará en recorrer esos 4 cm una vez que se haya soltado? Explica la respuesta.

A.6.- Una partícula de masa 12 g se mueve a lo largo del eje X atraída por una fuerza dirigida hacia la posición de equilibrio de la partícula que, en newtones, es $6 \cdot 10^{-4}$ veces su distancia instantánea x, medida en metros, respecto a la posición de equilibrio. Si la partícula parte del reposo en la posición $x = 10$ cm, encuéntrese la amplitud, el período y la frecuencia de la oscilación.

$A = 10$ cm; $T = 28{,}1$ s; $f = 0{,}036$ Hz

A.7.- ¿Funcionaría un péndulo en la Luna? Si el período de un péndulo en la Tierra es de 1 s, ¿qué período tendrá en la Luna? ¿Funcionaría un péndulo en un satélite geoestacionario? Explica las respuestas.

A.8.- El botafumeiro que se utiliza en la Catedral de Santiago de Compostela puede considerarse como un gran péndulo. Explica cómo se verá afectada la velocidad máxima que alcanza al:

a) Acortar la longitud de la cuerda.
b) Aumentar la amplitud de la oscilación.
c) Aumentar la masa del botafumeiro.

A.9.- Un geólogo quiere medir el valor de la gravedad en un lugar determinado. Para ello utiliza un péndulo cuya longitud es 45,12 cm y mide el tiempo que tarda en realizar 10 oscilaciones completas, con un ángulo inicial de 12º, encontrando que tarda 13,48 s en realizar las 10 oscilaciones. ¿Qué valor tiene la gravedad en ese punto?

$g = 9{,}80$ m/s^2

A.10.- Un cuerpo de 4 kg está vibrando con un MAS de amplitud 20 cm y frecuencia 5 Hz. Suponiendo que empezamos a contar el tiempo cuando pasa por la posición de equilibrio:

a) Escribe la ecuación del MAS utilizando la función seno y la función coseno.
b) Calcula la posición, velocidad y aceleración del cuerpo 2,32 s después de iniciado el movimiento.
c) Calcula la energía total, cinética y potencial del cuerpo en ese momento.

a) $x = 0{,}2$ sen $(10\pi t)$, $x = 0{,}2 \cos(10\pi t - \pi/2)$; b) $x = -11{,}8$ cm; $v = -5{,}1$ m/s, $a = 116$ m/s^2;
c) $E = 78{,}96$ J; $E_{cin} = 51{,}68$ J; $E_{pot} = 27{,}28$ J

A.11.- Explica si aumentan, disminuyen o no cambian la velocidad, el período y la energía total de un m.a.s.(al pasar por la posición de equilibrio), cuando: a) se sustituye el muelle por otro cuya constante elástica es el doble; b) sin cambiar de muelle, se duplica la amplitud del movimiento; c) sin cambiar de muelle ni de amplitud, se sustituye el cuerpo que está sujeto al final del muelle por otro cuya masa es el doble.